

*Euclide:
vita e opere*



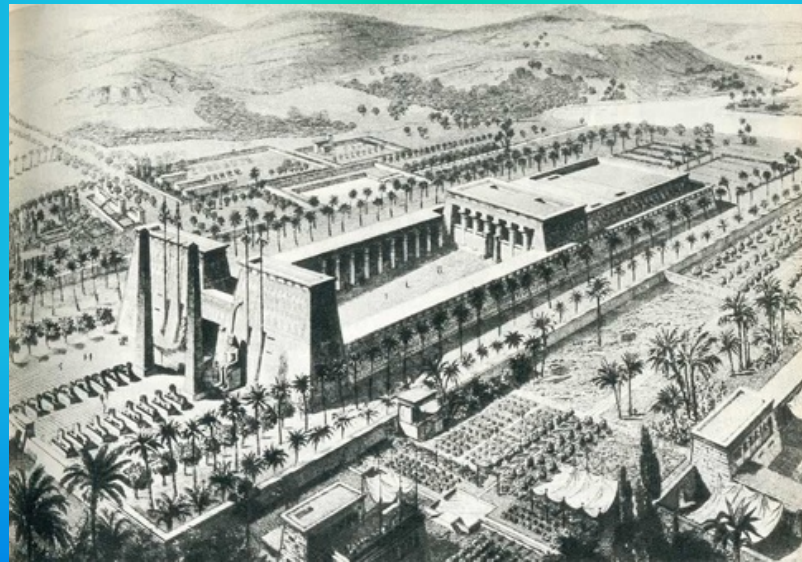
- Uno dei maggiori esponenti matematici nell'età aurea
- Vissuto ad Alessandria d'Egitto, al tempo di Tolomeo I, intorno al 300 a.C.



- Scarse informazioni sulla vita di Euclide
- Le notizie su di lui ci pervengono da Proclo, storiografo del V secolo d.C.



- Euclide passò probabilmente gran parte della sua vita a dirigere la Biblioteca di Alessandria
- Fondò qui un'illustre scuola



Due aneddoti riferiteci da Proclo

- “In geometria non esistono vie regie”



- “Dagli una moneta, perché vuol lucrare della conoscenza”



- Non inventò nuovi teoremi, ma riordinò in modo rigorosamente deduttivo circa due secoli di scoperte matematiche



Elementi

Struttura degli Elementi

- 13 libri

+

- 2 libri (appartenenti probabilmente a Ipsicle e Isidoro di Mileto)

Suddivisione

- 1-6: geometria piana elementare
- 7-9: teoria dei numeri interi e razionali
- 10: numeri incommensurabili e irrazionali
- 11-13: geometria dello spazio

Primo libro

- 23 definizioni
- 5 postulati
- 5 *nozioni comuni* (assiomi)
- 48 proposizioni



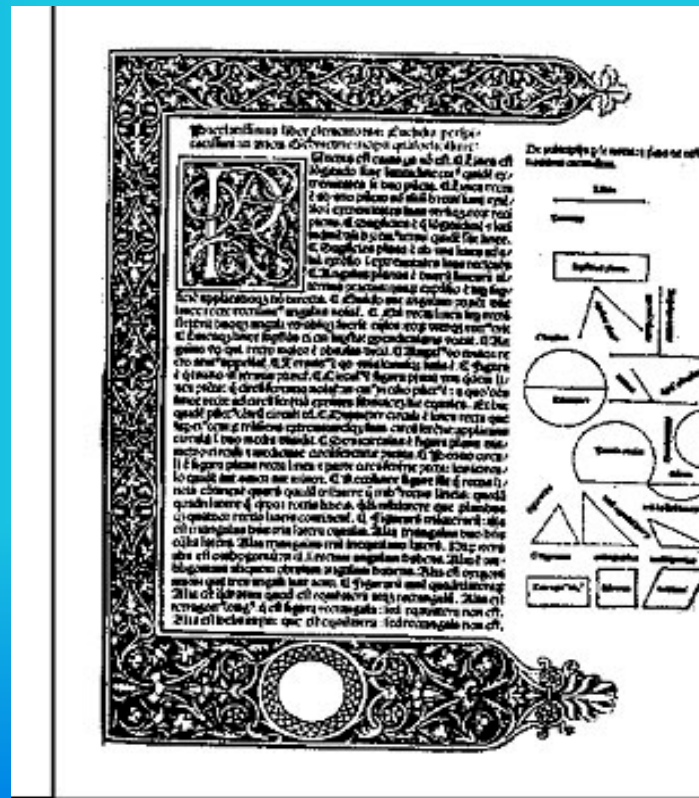
Principi

Edizioni degli Elementi

- Cassiodoro affermò che Euclide fu tradotto in latino da Boezio attorno al 500 d.C.

→ edizione andata perduta

- 1482: A Venezia, prima edizione a stampa



- 1505: Traduzione completa dal greco di Bartolomeo Zamberti
- 1533: “Editio Princeps” di Basilea
- 1543: Tartaglia ne dà una versione in italiano
- 1703: Grande edizione di Oxford di D. Grey

- 1814-1818: Esce in 3 volumi con traduzione latina e francese
- 1826-1829: Edizione del testo greco di E.F. August
- 1833-1888: Edizione completa delle opere di Euclide ad opera di Heiberg e Menge

Opere minori

- Opere giunte fino a noi:
 - i “Dati”
 - i “Fenomeni”
 - l’ “Ottica”
 - “Delle Divisioni”

- Opere andate perdute:

- i “Porismi”

- “Paralogismi”

- trattato sulle coniche

- scritto sui “Luoghi Superficiali”

Gli Elementi

Come sono formulati gli elementi?

- **POSTULATI:** dal latino “postulare”= richiedere. E’ richiesta l’accettazione della verità di un enunciato.
- **NOZIONI COMUNI:** affermazioni non dimostrate in quanto la loro verità risulta evidente (comune).
- **DEFINIZIONI o TERMINI:** frasi che presentano le caratteristiche di un elemento e che si dovrebbero fondare su concetti già conosciuti.
- **PROPOSIZIONI o TEOREMI:** enunciati la cui verità è dimostrata a partire da affermazioni precedenti, per mezzo di deduzioni logiche.

LIBRO I

```
graph TD; A[LIBRO I] --- B[23 definizioni]; A --- C[5 postulati]; A --- D[5 nozioni comuni]; A --- E[48 teoremi];
```

23 definizioni

5 postulati

5 nozioni comuni

48 teoremi

Ὅροι (definizioni)

ἀ. Σημεῖόν ἐστιν, οὐ μέρος οὐθέν.

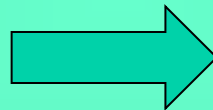
1. *Un punto è ciò di cui non c'è parte.*

Un punto è ciò che non ha dimensione.

β. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

2. *Una linea è una lunghezza senza larghezza.*

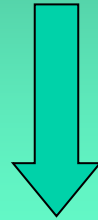
Una linea ha solo la lunghezza. Ha dunque una sola dimensione.



Ma sono davvero definizioni?

N.B. una definizione è efficace se si basa su concetti ed elementi già conosciuti

γ. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεία.
3. *Le estremità di una linea sono punti.*



Una linea è sempre finita



Infinito attuale:
Retta per noi

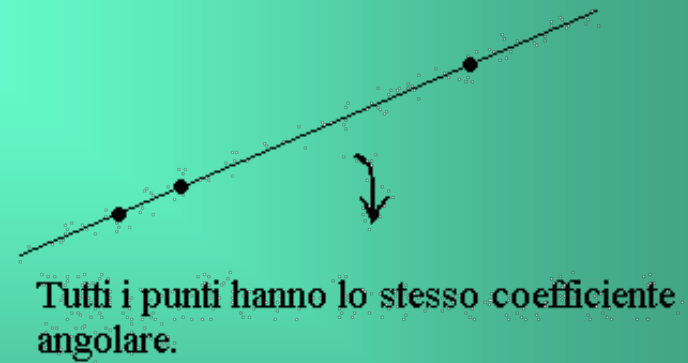
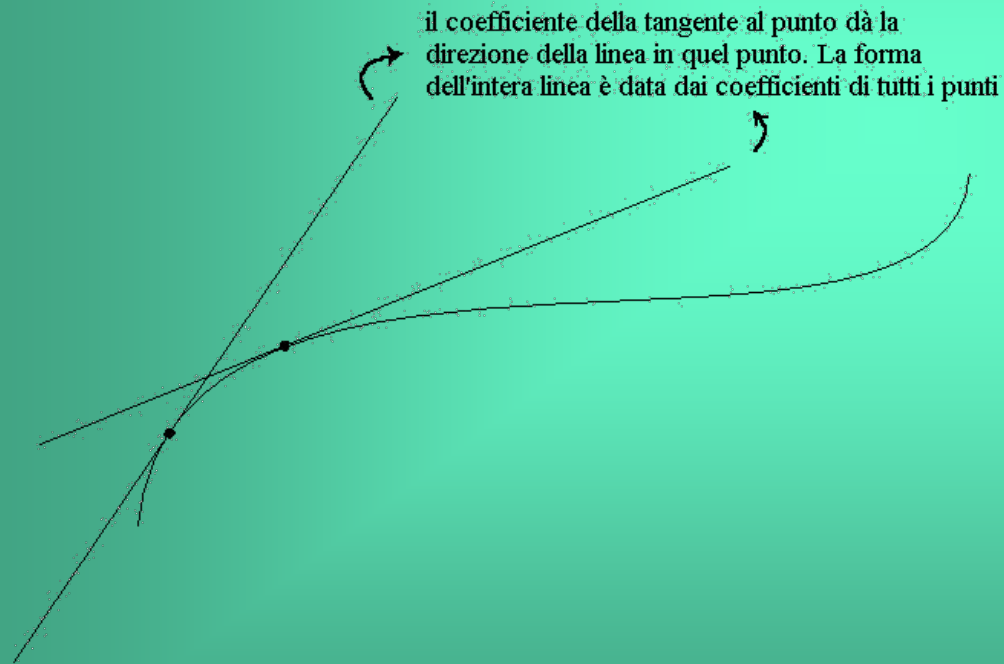


Infinito potenziale
retta per Euclide:
segmento prolungabile



δ. Εὐθεΐα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

4. *Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai punti su di essa stessa*



έ. Ἐπιφάνεια δέ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

5. *La superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza.*

La superficie ha dunque due dimensioni vedi punto 2

ζ. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

6. *Gli estremi della superficie sono linee.*
vedi punto 3

ζ. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

7. *È una superficie piana quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa stessa.*

vedi punto 4

Si ripete lo schema dei punti 2, 3, 4

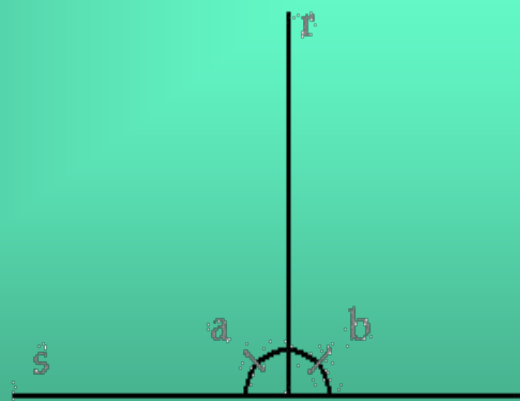
Queste prime definizioni sono tuttavia deboli, infatti non si basano su enti conosciuti in precedenza.

La geometria che si studia oggi preferisce prendere il PUNTO, la LINEA e il PIANO come ENTI PRIMITIVI da accettare: in questo modo le definizioni collegate ai 3 concetti risultano più accettabili

| GEOMETRIA DI EUCLIDE | GEOMETRIA DI OGGI |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1. Il punto è ciò che non ha parti (??) | PUNTO= ente primitivo |
| 2. La linea è ciò che ha solo lunghezza (??) | LINEA= ente primitivo |
| 3. La superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza (??) | PIANO= ente primitivo |

ι. Όταν δὲ εὐθεΐα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῆ, ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν γωνιῶν ἐστί, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεΐα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφεστηκεν.

10. *Qualora una linea retta innalzata su una linea retta produca angoli adiacenti uguali uno all'altro ciascuno degli angoli uguali è retto, e la retta che si innalza è detta perpendicolare rispetto a quella su cui s'innalza.*

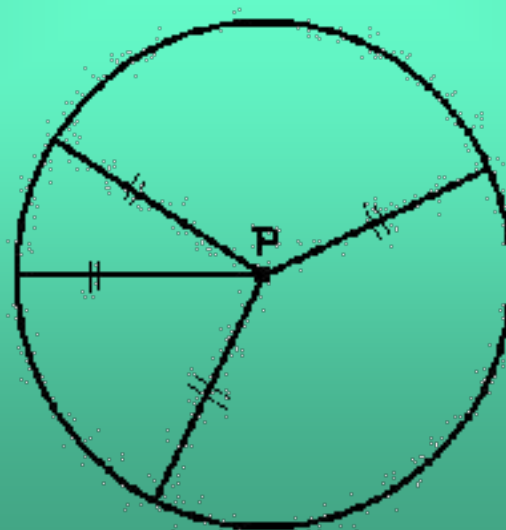


angolo a congruente
all'angolo b

r è perpendicolare a s

ιέ. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

15. *Il cerchio è una figura piana compresa da una sola linea [che si chiama circonferenza]*, rispetto alla quale sono uguali tra loro tutte le linee rette che cadono [sulla circonferenza del cerchio]* da un solo punto tra quelli che giacciono nel cerchio.*

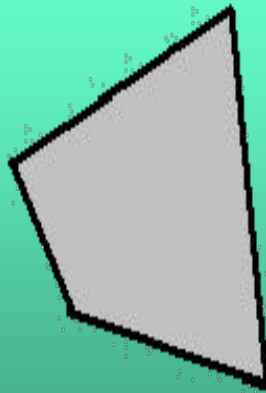


ιβ. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

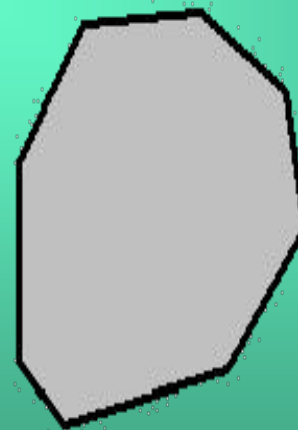
19. *Le figure rettilinee sono quelle contenute da linee rette, i trilateri (triangoli) contenuti da tre linee rette, i quadrilateri da quattro, e i polilateri (poligoni) da più di quattro.*



triangolo

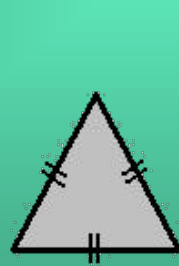
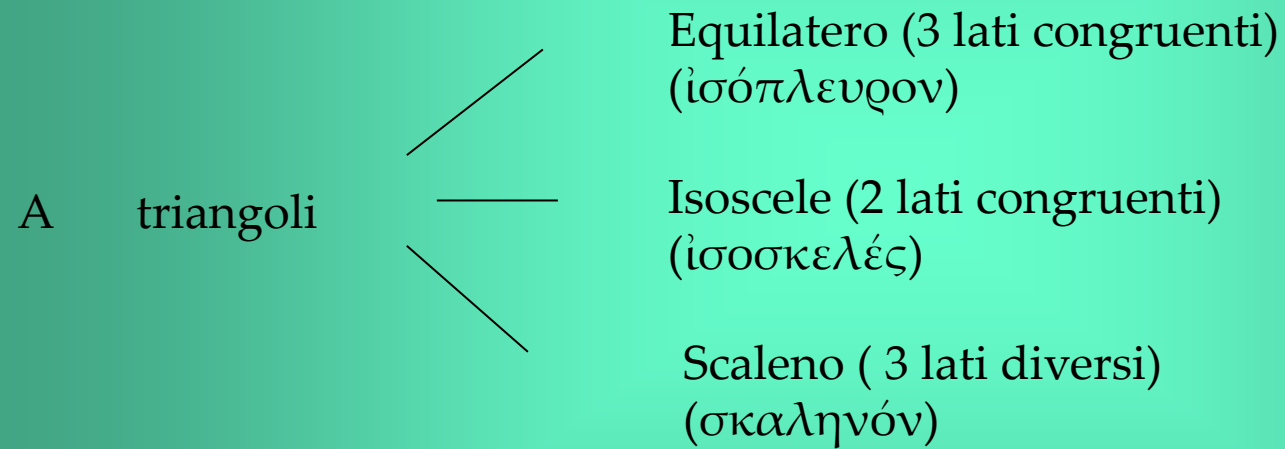


quadrilatero



poligono

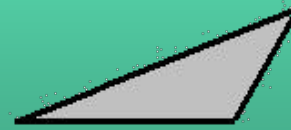
- Triangoli (def. 20 e 21) due classificazioni
 - Per numero lati congruenti A
 - Per gli angoli B



triangolo
equilatero



triangolo
isoscele



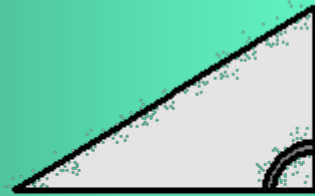
triangolo
scaleno

B triangoli

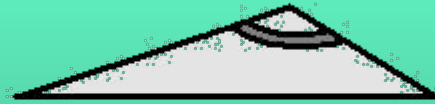
Rettangoli (1 angolo retto)
(ὀρθογώνιον)

Ottusangoli (1 angolo ottuso)
(ἀμβλυγώνιον)

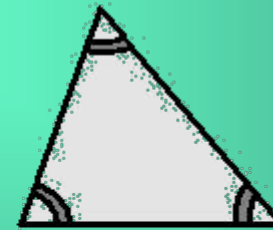
Acutangolo (3 angoli acuti)
(ὀξυγώνιον)



1 angolo retto:
triangolo rettangolo



1 angolo ottuso:
triangolo ottusangolo



3 angoli acuti:
triangolo
acutangolo

κβ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἔστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἔστικαὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρόν δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρόν μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἔστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.

22. *Tra le figure quadrilatera è un quadrato quello che è equilatero e rettangolo, un rettangolo quello che è rettangolo ma non equilatero, un rombo quello che è equilatero ma non rettangolo, un romboide quello che ha lati e angoli opposti uguali, e che non è né equilatero né rettangolo; tutti quelli oltre a questi siano chiamati trapezi.*

PER EUCLIDE

QUADRATO: lati congruenti e angoli retti

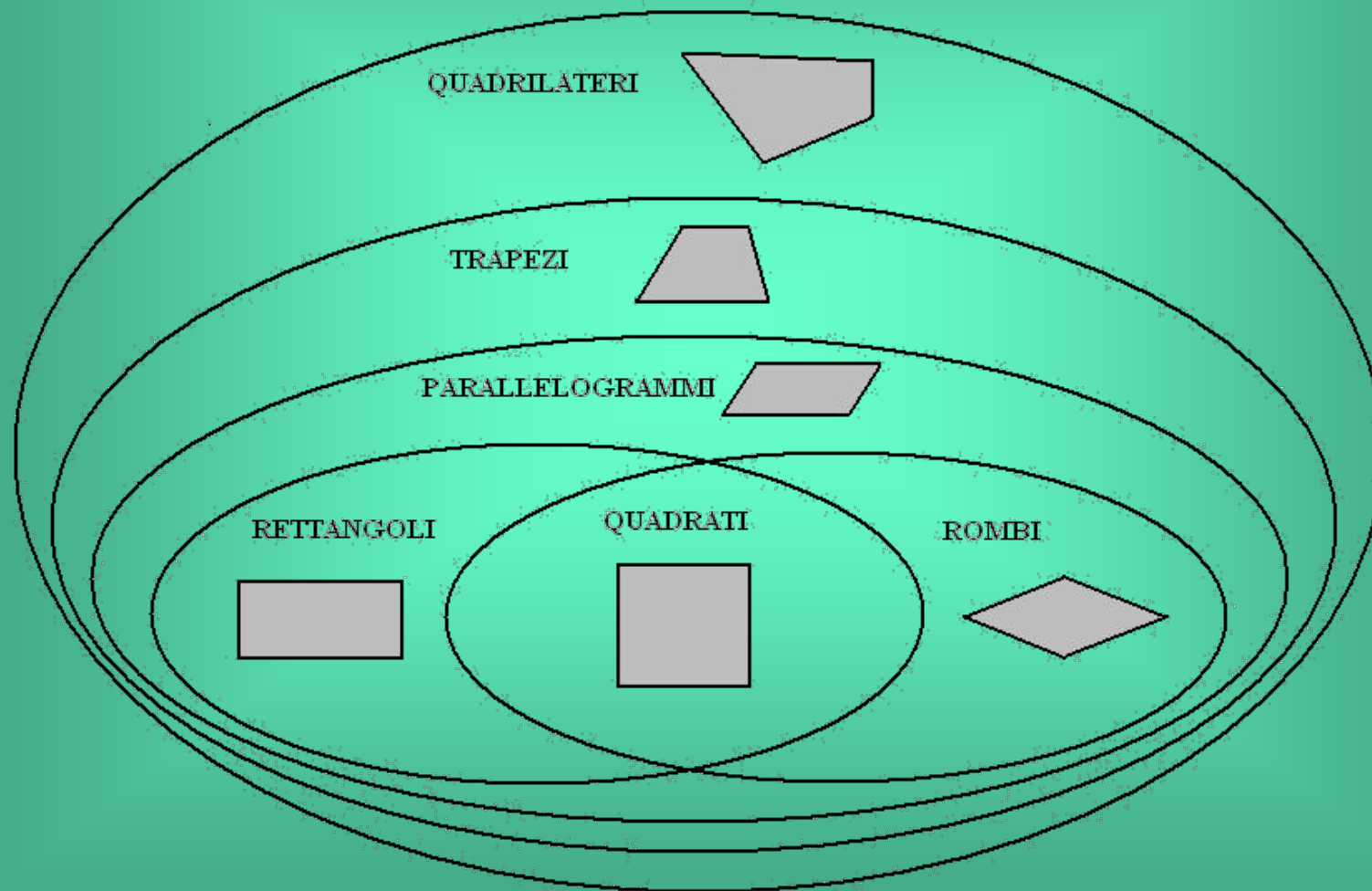
RETTANGOLO: angoli retti ma non lati congruenti

ROMBO: lati congruenti ma non angoli retti

ROMBOIDE: lati e angoli opposti congruenti ma non equilatero rettangolo

TRAPEZIO: quadrilatero generico

PER NOI



κγ'. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

23. Le linee rette parallele sono quelle che stanno sullo stesso piano e se prolungate all'infinito da entrambe le parti, non si incontrano tra loro da nessuna parte.



rette parallele

Κοινὰ ἔννοιαι (nozioni comuni)

ἀ. Τὰ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

1. *Le cose uguali ad una medesima cosa sono anche uguali tra loro.*
Se $A=B$ e $C=B$ allora $A=C$.

β. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

2. *E qualora cose uguali siano aggiunte a cose uguali, le somme sono uguali.*
Dati $A+B=C$ e $A'+B'=C'$, se $A=A'$ e $B=B'$ allora $C=C'$.

γ. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῆ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

3. *E qualora cose uguali siano sottratte a cose uguali, i resti sono uguali.*
Dati $A-B=C$ e $A'-B'=C'$, se $A=A'$ e $B=B'$ allora $C=C'$.

δ. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν.

4. *E cose che coincidono tra loro sono uguali una all'altra.*

ε. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν [ἐστὶν].

5. *E il tutto è più grande della parte.*

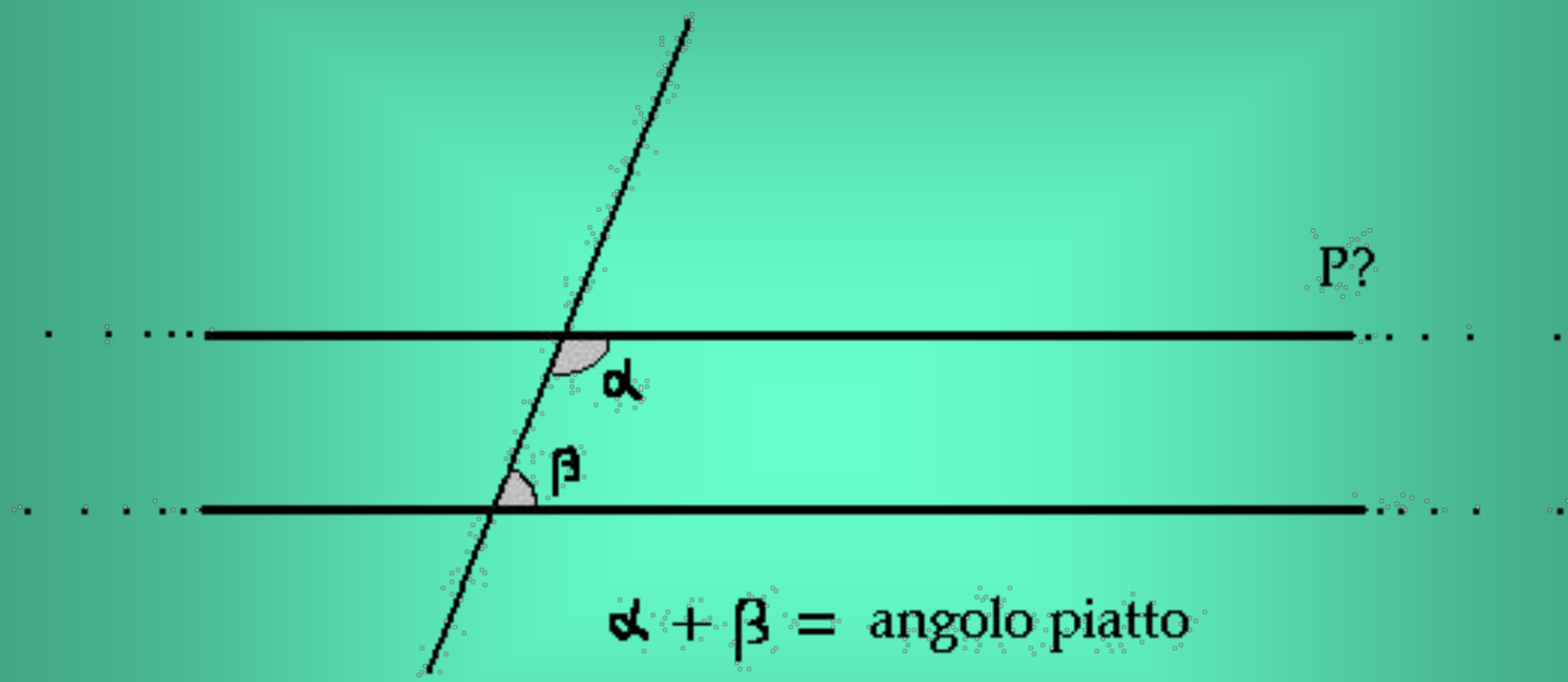
Αἰτήματα (postulati)

- ἀ. Ἡιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
1. *Risulti postulato che si possa condurre una linea retta da un punto a qualsiasi altro punto.*
- β. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπὶ εὐθείας ἐκβαλεῖν.
2. *E che una linea retta limitata possa essere prolungata continuamente in una linea retta.*
- γ. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.
3. *E che si possa con qualsiasi centro e raggio descrivere un cerchio.*
- δ. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
4. *E che tutti gli angoli retti siano uguali tra loro.*

ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

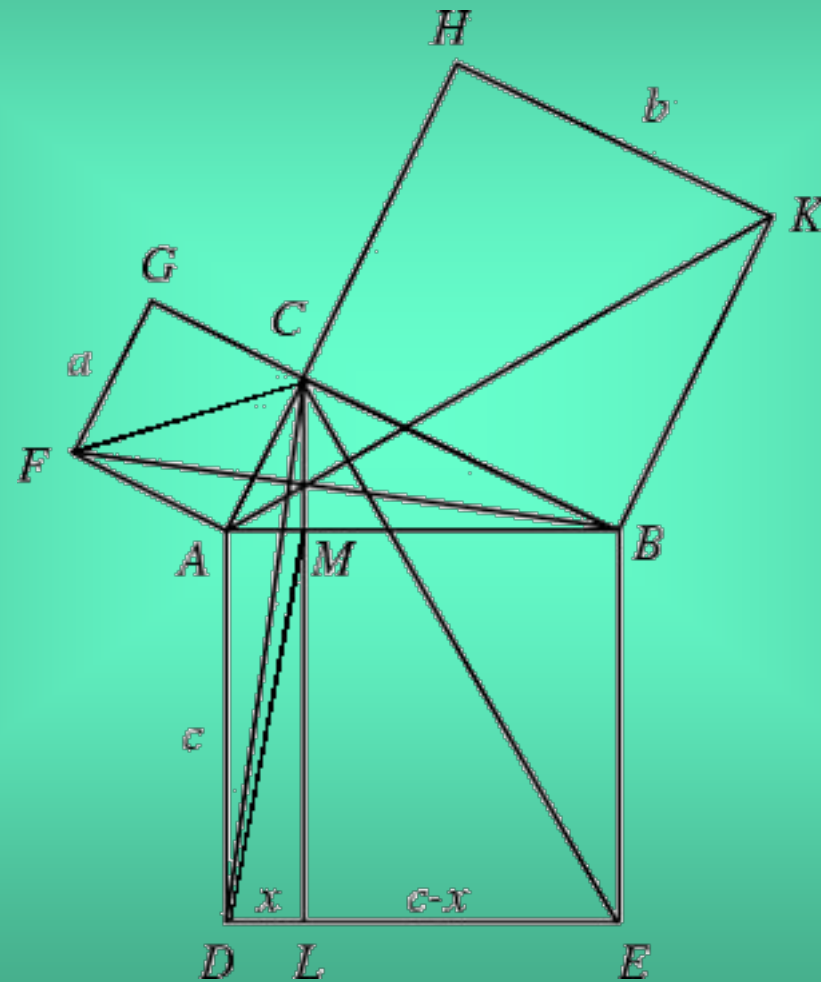
5. *E che qualora una linea retta cadendo su due linee rette formi gli angoli interni e dalla medesima parte minori di due angoli retti le due rette estese all'infinito vengano a incontrarsi da quella parte dove ci sono gli angoli minori di due angoli retti.*

Ovvero: quando una retta che cade su due rette forma gli angoli coniugati interni la cui somma sia inferiore a un angolo piatto, le due rette prolungate continuamente si incontrano dalla parte dei due angoli coniugati.



esiste il punto di incontro delle rette P?

Teorema di Pitagora



Dal V postulato alle geometrie non euclidee

| | Geometria euclidea | geometria iperbolica (Lobacevskij) | geometria ellittica (Riemann) |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------------|----------------------------------|
| curvatura del piano | nulla | negativa | positiva |
| numero di rette parallele a una retta data e passanti per un punto esterno ad essa | 1 | almeno 2 | 0 |
| somma degli angoli interni di un triangolo | 180° | $<180^\circ$ | $>180^\circ$ |