Paradosso del bibliotecario

Il paradosso del bibliotecario è un'altra versione del paradosso di Russell dovuta al logico matematico norvegese Thoralf Skolem.

Essa può essere così raccontata. Al responsabile di una grande biblioteca viene affidato il compito di produrre gli opportuni cataloghi. Egli compie una prima catalogazione per titoli, poi per autori, poi per argomenti, poi per numero di pagine e così via. Poiché i cataloghi si moltiplicano, il nostro bibliotecario provvede a stendere il catalogo di tutti i cataloghi. A questo punto nasce una constatazione. La maggior parte dei cataloghi non riportano sé stessi, ma ve ne sono alcuni (quali il catalogo di tutti i volumi con meno di 5000 pagine, il catalogo di tutti i cataloghi, ecc.) che riportano sé stessi.

Per eccesso di zelo, lo scrupoloso bibliotecario decide, a questo punto, di costruire il catalogo di tutti cataloghi che non includono sé stessi.

Il giorno seguente, dopo una notte insonne passata nel dubbio se tale nuovo catalogo dovesse o non dovesse includere sé stesso, il nostro bibliotecario chiede di essere dispensato dall'incarico.

Si può notare come la prima traduzione scherzosa dell'antinomia di Russell, quella del così detto paradosso del barbiere, non dia origine ad un vero paradosso logico: il fatto che la relazione "fare la barba a..." sia definita per tutti gli abitanti dell'isola meno che per il barbiere, non è diversa dal fatto che, nei numeri reali la proprietà "avere un numero inverso" valga per tutti tranne lo zero.

Osserva E.W. Beth: "*Il dilemma (del barbiere) non costituisce un dilemma per la logica. Infatti l'ipotesi che l'una o l'altra regola di diritto abbia delle conseguenze assurde, non è in sé assurda. Un siffatto avvenimento può sollevare gravi questioni di diritto (...) ma non dà luogo a problemi logici*".

La traduzione scherzosa di Skolem conserva meglio il carattere dell'originaria antinomia di Russell.

Un'altra versione del paradosso è quello della biblioteca infinita, nella quale sono presenti anche i volumi mai scritti su cose mai pensate, o mai esistite, e che include, ancor più paradossalmente, anche il catalogo di tutti cataloghi che non includono sé stessi.

Incidentalmente, si ricorda che sul paradosso del bibliotecario scrissero sia **Jorge Luis Borges** sia **Umberto Eco**. Il primo nel racconto La biblioteca di Babele, contenuto nel volume Finzioni, e con varie allusioni nei testi su Uqbar, il secondo citando il primo nel De Bibliotheca.

Paradosso del barbiere

Il paradosso del barbiere è un'antinomia formulata dal filosofo e logico britannico Bertrand Russell nel 1918. Essa costituisce approssimativamente una riformulazione intuitiva, o figurata, del famoso paradosso di Russell. L'antinomia può essere enunciata così:

«*In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. Il barbiere rade se stesso?*»

Se, come apparirebbe plausibile, il barbiere si radesse da solo, verrebbe contraddetta la premessa secondo cui il barbiere rade gli uomini che non si radono da soli. Se invece il barbiere non si radesse autonomamente, allora dovrebbe essere rasato dal barbiere, che però è lui stesso: in entrambi i casi si cade in una contraddizione.

La somiglianza con il paradosso di Russell sta nel fatto che il villaggio del barbiere si potrebbe considerare diviso in due parti:

- Quella degli uomini che si radono da soli (che è assimilabile alla categoria degli insiemi che appartengono a se stessi nella versione originale dell'antinomia).
- Quella degli uomini che, non radendosi da soli, vengono rasati dal barbiere (nella versione originale, gli insiemi che non appartengono a se stessi).

Il problema è in quale categoria vada incluso il barbiere: infatti, sia che venisse incluso nella prima, sia che venisse incluso nella seconda, la situazione sarebbe contraddittoria. Il barbiere è un insieme che appartiene a se stesso se e solo se non appartiene a se stesso.

Si è detto che questo paradosso costituisce una riformulazione solo approssimativa del paradosso di Russell perché, proprio a causa del suo aspetto concreto, in realtà potrebbe essere considerato semplicemente una dimostrazione per assurdo del fatto che non possono esistere barbieri con le caratteristiche citate. In particolare, fu il logico statunitense Willard Quine ad affermare che il paradosso del barbiere costituisce in sostanza una

Paradosso del Grand Hotel di Hilbert

Il Paradosso del Grand Hotel è un celebre paradosso inventato dal matematico David Hilbert per mostrare alcune caratteristiche del concetto di infinito, e le differenze fra operazioni con insiemi finiti ed infiniti.
Hilbert immagina un hotel con infinite stanze, tutte occupate, ed afferma che qualsiasi sia il numero di altri ospiti che sopraggiungano, sarà sempre possibile ospitarli tutti, anche se il loro numero è infinito.
Nel caso semplice, arriva un singolo nuovo ospite. Il furbo albergatore sposterà tutti i clienti nella camera successiva (l'ospite della 1 alla 2, quello della 2 alla 3, etc.); in questo modo, benché l'albergo fosse pieno è comunque, essendo infinito, possibile sistemare il nuovo ospite.
Un caso meno intuitivo si ha quando arrivano infiniti nuovi ospiti. Sarebbe possibile procedere nel modo visto in precedenza, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti (già spazientiti dal precedente spostamento): sostiene allora Hilbert che la soluzione sta semplicemente nello spostare ogni ospite nella stanza con numero doppio rispetto a quello attuale (dalla 1 alla 2, dalla 2 alla 4,etc.), lasciando ai nuovi ospiti tutte le camere con i numeri dispari, che sono essi stessi infiniti, risolvendo dunque il problema. Gli ospiti sono tutti dunque sistemati, benché l'albergo fosse pieno.
Ancora più difficile: ci sono infiniti alberghi con infinite stanze tutti al completo. Tutti gli alberghi chiudono, tranne uno. Tutti gli ospiti vogliono alloggiare nell'unico albergo rimasto aperto. Sarebbe possibile procedere come prima, ma solo scomodando infinite volte gli ospiti. Un modo alternativo, invece, è di assegnare ad ogni persona una coppia di numeri (n,m) in cui n indica l'albergo di provenienza, e m la relativa stanza. Gli ospiti sono quindi etichettati in questo modo:

$$\begin{array}{ccccc}
(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,m) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & \cdots & (2,m) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(n,1) & (n,2) & \cdots & (n,m) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

A questo punto basta assegnare le nuove stanze agli ospiti secondo un criterio ordinato, ad esempio per diagonali:

$$(1,1) \to 1; \quad (2,1) \to 2; \quad (1,2) \to 3; \quad (3,1) \to 4; \quad (2,2) \to 5; \quad (1,3) \to 6; \quad \ldots$$

Questo paradosso, nonostante sia piuttosto elementare, ha contribuito, all'epoca ai matematici, ed oggi ai profani, a far comprendere la differenza profonda e sostanziale tra gli insiemi finiti e infiniti, aprendo le porte a gran parte delle moderne branche dell'aritmetica moderna: analisi non-standard e transfinita su tutte.

Racconti
Esistono alcuni racconti che ripropongono una versione narrativa del paradosso. Uno di questi è "L'hotel straordinario" di Stanislaw Lem. Esiste anche una versione di Ian Stewart. Nel racconto di S. Lem, si propone di sistemare gli ospiti secondo i quadrati della matrice sopra descritta cioè nella stanza 1 si mette l'ospite con n=1 e m=1 (cioè l'ospite rimane dov'è) ; nella stanza 2, l'ospite dell'hotel 1 e che sta nella stanza 2 (m=1 e n=2) e poi nella stanza 3 l'ospite m=2 e n=2 (hotel 2 stanza 2), nella stanza 4 l'ospite del hotel=2 e stanza 1 cioè m=2, n=1 e poi si continua a contare associando i numeri 5, 6, 7, 8 e 9 con le coppie (m,n) rispettivamente in questo ordine (1,3), (2,3), (3,3), (3,2) e (3,1) e cosi via con i quadrati successivi (per i numeri 10, 11 ecc..). Nel racconto Lem propone quindi per calcolare il numero della stanza le seguenti formule: se m<n, allora il numero

della stanza è $n2-m+1$ mentre se è $m \geq n$, allora il numero della stanza è $(m-1)2+n$. In questo modo nel racconto riesce a sistemare infiniti ospiti di infiniti hotel in un solo hotel di infinite stanze già tutte occupate!
Il Paradosso dell'albergo infinito si trova anche nel libro "L'infinito" di John David Barrow al capitolo III intitolato "Benvenuti all'Albergo Infinito".