# La logica del Novecento

*Parole chiave*

logica, filosofia, matematica, paradigma, algoritmo, informatica, teoria degli insiemi, linguaggio formale

Per secoli logica e aristotelismo sono stati quasi sinonimi; un binomio che fondamentalmente non è stato sciolto neppure nel Rinascimento o nel Seicento e Settecento, quando pure furono all'opera scienziati e filosofi del calibro di Galilei, Cartesio e Leibniz. Con l'Ottocento si apre una nuova stagione, con pensatori come Boole e Frege, e con il Novecento fioriscono indagini che intrecciano logica, matematica e discipline linguistiche. Il materiale che proponiamo si riferisce alle ricerche e agli studi sulle logiche del Novecento.

*Materiali*

Susanna Marietti, *La logica del Novecento*
Luca Dell'Aglio*, La logica formale: un percorso didattico*
*Una scheda su Alan Turing, il suo test e il codice Enigma*

## La logica nel Novecento

Per secoli logica e aristotelismo sono stati quasi sinonimi; certo, nel tempo, basta ricordare la Scolastica, ci sono stati affinamenti e approfondimenti, così come si sono conosciute altre forme logiche – quelle inaugurate dagli Stoici, per esempio – ma fondamentalmente quel binomio non è stato sciolto neppure nel Rinascimento o nel Seicento e Settecento, quando pure furono all'opera scienziati e filosofi del calibro di Galilei, Cartesio e Leibniz. Con l'Ottocento si apre una nuova stagione, con pensatori come Boole e Frege, e con il Novecento fioriscono indagini che intrecciano logica, matematica e discipline linguistiche. Alle ricerche logiche del Novecento è dedicato questo Dossier, che vuole offrire materiali per un primo orientamento e suggerimenti didattici in un campo così vasto e complicato.
Il Dossier presenta due articoli di Susanna Marietti, *La logica nel Novecento*, e di Luca Dell'Aglio, *La logica formale: un percorso didattico*, una Scheda su Alan Turing con due link – uno al cosiddetto *Test di Turing* e uno a *Enigma* – e una Bibliografia relativa alle *Opere Treccani*, utile per ulteriori approfondimenti.

## La logica del Novecento
Susanna Marietti*

La logica, diceva Kant, è nata già compiuta fin dai tempi di Aristotele. Queste parole - che non volevano cosituire un complimento alla disciplina quanto piuttosto sottolinearne la limitatezza - sono state recisamente smentite dalla storia successiva. In tempi recenti si è prodotta una rivoluzione totale nella rappresentazione logica del ragionamento, oggi ben al di là del sillogismo aristotelico. La logica moderna si sviluppa a partire dalla nuova analisi della proposizione introdotta da Gottlob Frege alla fine dell''800, e apre una serie di problematiche che sarà al centro del dibattito filosofico novecentesco.
Tre ambiti di ricerca, variamente intrecciati fra loro, hanno segnato in maniera cruciale lo scenario di questo straordinario incontro tra logica e filosofia: il dibattito sui fondamenti della matematica, il paradigma dell'Intelligenza Artificiale e la svolta linguistica che ha dato luogo alla filosofia analitica. Per le conseguenze che si portano dietro,

ma a parer mio anche per i limiti concettuali che ancora ci lasciano in eredità, essi andrebbero considerati nel piano di studi dell'educazione superiore.
Logica e filosofia vivono da sempre in un gioco di rimandi e di circolarità complesse. Se non è in generale un rapporto univoco che vede un'innovazione logica come nata sotto la spinta di un problema teoretico, o piuttosto un paradigma filosofico come ispirato dalla disponibilità di particolari strumenti logici, nel caso della logica moderna è vero tuttavia che essa è sorta essenzialmente a seguito di un'esigenza di natura filosofica, sulla scia di eventi che andavano mettendo in crisi l'immagine rassicurante della matematica come la più certa delle conoscenze. L'Ottocento aveva assistito al sorgere delle geometrie non-euclidee. La rottura della coincidenza tra percezione spaziale e coerenza logica aveva inferto un colpo mortale alla fiducia nell'evidenza quale strumento di certezza. Se esistono spazi logicamente coerenti e tuttavia non percepibili, se la geometria non descrive più quell'unico, autentico spazio nel quale ci muoviamo e che ci garantisce l'affidabilità della descrizione, è necessario allora che sia la logica ad assicurci che una contraddizione non si nasconda nella teoria. D'altro lato, l'uso di concetti problematici quali quelli dell'analisi infinitesimale - grandezze irrazionali, grandezze continue, infinito attuale - non poteva che accrescere il senso diffuso di disagio. E' su questo sfondo che nasce la logica moderna, concepita inizialmente quale strumento per fornire una giustificazione razionale - una fondazione filosofica - alla matematica. Sotto lo stendardo mitologico della certezza assoluta, Frege, Russell, Hilbert nei primi anni del secolo combatteranno la battaglia che lascerà i loro tentativi sul campo dei paradossi semantici e del teorema di Gödel (1931); ma più profondamente ancora, io credo, sul campo di una concezione della conoscenza più duttile e meno dogmatica. Consapevoli infatti delle sconfitte subite dall'ideale del sapere infallibile, siamo oggi maggiormente attenti anche a filosofie della matematica capaci di tenere in conto l'uomo - con le limitazioni intrinseche al suo punto di vista - quale soggetto attivo di conoscenza (come quelle che già allora ci proponevano Poincaré, Weyl e la scuola intuizionista, Husserl).
Se questo primo incontro tra logica e filosofia ci ha senz'altro regalato splendidi linguaggi formali di calcolo, il desiderio di assolutizzazione con cui li ha accompagnati ha precluso al Novecento la possibilità di esplorare altre strade oltre a quella della sistematizzazione logica a posteriori di dimostrazioni matematiche (l'euristica matematica, la ricerca di una logica che aiuti nella scoperta di nuove dimostrazioni, è stata ad esempio quasi del tutto trascurata). In un certo senso, un destino analogo ha avuto il secondo, fenomenale incontro tra logica e filosofia, quel programma di ricerca che nella seconda metà del '900 va sotto il nome di Intelligenza Artificiale.

Nel 1936 il matematico inglese Alan Turing definisce una macchina ideale dalla costituzione semplicissima in grado di computare, avendo a disposizione spazio e tempo illimitati, qualsiasi funzione computabile dal più potente dei calcolatori. Al concetto intuitivo di funzione effettivamente computabile si sostituisce il concetto rigoroso di funzione computabile da una macchina di Turing. Nel 1950 Turing propone il famoso gioco dell'imitazione, con il quale intende operare un'ulteriore sostituzione: alla questione se le macchine siano o meno in grado di pensare, Turing propone di sostituire la questione se le macchine possano avere prestazioni analoghe a quelle umane nel gioco dell'imitazione (cosa che equivale a chiedere: le macchine sono in grado di ingannarci come lo è un essere umano?). Nasce così la sfida del demiurgo informatico: costruire una macchina che riproduca l'uomo nella sua parte più nobile, la mente. Il dibattito sul tema è amplissimo. La cosiddetta *IA forte*, sotto il già noto stendardo della conoscenza assoluta, tentò di identificare senza residui il ragionamento umano con l'intelligenza computante. La mente è un programma. Il pensiero è ricostruibile rappresentandone i procedimenti in concatenazioni di passaggi logici elementari, algoritmicamente gestibili e dunque infallibili. Alla base dell'IA forte stava il postulato del *funzionalismo*: la mente, in quanto funzione del cervello, è separabile dal suo supporto materiale e non ne dipende in alcun modo essenziale. Di conseguenza, trasferendone su un elaboratore elettronico gli algoritmi, la macchina diviene a tutti gli effetti una mente vera e propria.
Purtroppo o per fortuna, i successi di quest'impostazione radicale non sono andati oltre alcune limitate implementazioni interne a contesti formali. Come anche le recenti scienze cognitive vanno mostrando, in un ambito più generale non pare possibile ridurre la conoscenza a elementi costitutivi atomici, a passaggi minimi dotati di un significato astorico e indipendente

dal contesto. Conoscenza e informazione sono fenomeni interattivi, sistemici, evolutivi, nei quali l'uomo entra in relazioni complesse con l'ambiente che lo circonda. Il pensiero umano non si limita a seguire procedimenti simbolici corretti, ma utilizza continuamente strategie euristiche fallibili, e tuttavia estremanente potenti nell'elaborazione dell'informazione.
Terzo, influente incontro tra logica e filosofia novecentesche è quello che vede la costruzione dei linguaggi formali all'origine della filosofia analitica, corrente di pensiero tuttora dominante nel mondo anglosassone. Più che di una tradizione dottrinaria con un *corpus* condiviso di assunti tematici, si tratta di una modalità precipua di fare filosofia, affrancata da costruzioni sistemiche e speculazioni metafisiche e impegnata piuttosto in un minuzioso lavoro di analisi degli strumenti linguistici a nostra disposizione. Opera fondamentale nel gettare le basi di una simile impostazione è il *Tractatus logico-philosophicus* di Wittgenstein (1921). Prendendo le mosse dai lavori di Frege e di Russell, Wittgenstein vede il linguaggio formale - un linguaggio ripulito dalle proprietà accidentali delle grammatiche naturali - quale scrittura ideale del pensiero in sé stesso, rispecchiamento a propria volta della struttura del mondo, costituita secondo processi di composizione a partire da componenti atomici immutabili. Compito delle scienze positive, unico modello di comunicazione significante, è quello di descrivere le varie forme compositive che trovano realizzazione nel mondo attuale, laddove alla filosofia resta il ruolo strumentale di analizzare e rendere trasparente il linguaggio utilizzato nella descrizione.
Il *Tractatus* ebbe un'enorme influenza nel panorama epistemologico del XX secolo, in particolare su coloro che si riconobbero nel pensiero del Positivismo logico, o Neoempirismo, sorto all'interno del cosiddetto Circolo di Vienna ma presto esportato oltreoceano da vicende storiche europee. La risonanza e le evoluzioni che le idee neoempiriste ebbero negli Stati Uniti aprirono definitivamente la via all'analisi linguistica come strumento di lavoro dell'indagine filosofica, strumento che tanta parte ha avuto lungo tutto il secolo scorso e continua ad avere fino ai giorni nostri.

*Docente presso la Cattedra di Filosofia Teoretica 2 dell'Università di Milano

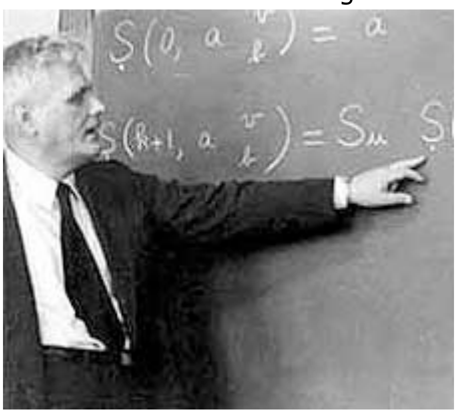
## La logica formale: un percorso didattico

Luca Dell'Aglio*

Quelle che seguono sono delle brevi osservazioni sui risvolti che, a livello elementare, alcuni dei principali sviluppi della moderna logica formale tendono a presentare da un punto di vista didattico, in stretta relazione con argomenti e concetti di carattere, in primo luogo, filosofico e matematico. Quanto detto non riguarda la conoscenza delle basi elementari della teoria degli insiemi e della logica proposizionale, che si suppongono sviluppate a un livello formativo iniziale.

### I fondamenti della matematica

I primi spunti risultano inevitabilmente connessi alla questione dei fondamenti della matematica, da cui come è ben noto la moderna logica matematica tende in gran parte a emergere verso la fine dell'Ottocento.
Il punto della questione è che – a partire da alcune questioni paradigmatiche legate alla caratterizzazione di vari rami centrali del pensiero matematico come l'aritmetica e la geometria – la questione dei fondamenti permette di mettere in evidenza modi diversi di considerare le teorie matematiche.



Ciò può essere svolto dando una panoramica delle principali scuole di carattere fondazionale della prima parte del Novecento, con particolare riguardo per la componente logicista, sia in epoca anteriore che posteriore alla cosiddetta crisi dei fondamenti; in particolare si può fare riferimento al programma di fondazione dell'aritmetica su basi logiche di G. Frege, ai fondamenti della teoria dei numeri di G. Peano nel contesto generale delle sue concezioni in campo logico, al programma logicista di B. Russell.

Il discorso può essere esteso anche ad aspetti meno classici del pensiero fondazionale del Novecento, volgendo l'attenzione ad alcuni dei tentativi di fondazione della matematica meno relativi a considerazioni di carettere insiemistico. Più legati alla pratica matematica effettiva, questi tentativi riguardano durante gli anni '40 del XX secolo, la centralità assegnata in ambito bourbakista al concetto di struttura (con la considerazione di strutture algebriche, d'ordine e topologiche e delle loro possibili combinazioni); e, nella seconda parte del secolo, lo spostamento di attenzione su oggetti quali le categorie e i funtori. Una considerazione di queste tematiche, anche solo parziale, può dare in modo esauriente l'idea di quanto possa cambiare nel corso del tempo il tentativo di rispondere alla (eterna) domanda "che cos'è la matematica?".

**La teoria degli insiemi**

In modo strettamente legato alla questione dei fondamenti possono essere anche considerati alcuni risvolti didattici della teoria degli insiemi.
Qui l'interesse tende in primo luogo a riguardare la *teoria ingenua* degli insiemi, per come essa si viene sviluppando nelle ricerche di G. Cantor, negli ultimi due decenni del XIX secolo, a partire da alcuni particolari aspetti dell'analisi matematica ottocentesca.
Il punto chiave nella considerazione, per quanto elementare, di tale teoria riguarda, in primo luogo il modo in cui in epoca moderna viene affrontato in termini formali il concetto di 'infinito' – dalla rilettura dei classici paradossi dell'infinito, in termini dell'idea di 'potenza' di un insieme, al modo in cui vengono introdotti i numeri transfiniti e le loro proprietà. Qualche cenno alla questione dell'ipotesi del continuo apre inoltre l'opportunità – facendo riferimento a qualche esempio di applicazione dell'argomento diagonale cantoriano – di vedere all'opera un caso concreto di gerarchia di insiemi infiniti di diverso tipo, dando così un'idea dell'enorme portata concettuale della rivoluzione operata da Cantor.
Tra gli altri motivi d'interesse che la teoria degli insiemi può presentare da un punto di vista elementare vanno anche considerati gli sviluppi che la teoria riceve successivamente in relazione alla necessità di evitare le antinomie – come il celebre paradosso di Russell sulla contraddittorietà del principio di comprensione –, che caratterizzano alcuni aspetti centrali della crisi stessa dei fondamenti. In particolare, i vari tentativi di dare una formulazione assiomatica della teoria – a partire da quello di Zermelo nel 1908 – permettono tra l'altro di vedere all'opera, in un caso elementare ma molto rilevante da un punto di vista concettuale, il tipo di approccio ipotetico-deduttivo così caratteristico del pensiero matematico del XX secolo.

**L'idea di algoritmo**

Altro tema chiave della moderna logica formale è quello relativo alla teoria della computabilità. Si tratta di una questione che, come è ben noto, è strettamente legata al problema, formulato inizialmente da Hilbert, dell'esistenza di un algoritmo che permetta di affermare se una data proposizione risulti (o meno) una conseguenza logica di altre proposizioni; un problema che – mentre fu dimostrato ammettere soluzione, nel 1922 da Emil Post, nel caso della logica proposizionale, tramite la considerazione delle tavole di verità – ricevette, invece, risposta negativa nel caso delle logiche del primo ordine, poco più di un decennio più tardi, per opera di Alan Turing e Alonzo Church.
Tra le varie ricadute che presenta su un piano didattico questo sviluppo di idee, c'è da considerare il fatto centrale che esso condusse a una precisazione, da più punti di vista, del concetto di 'algoritmo'. Sono al riguardo possibili tragitti che partono tanto dall'idea di computabilità che da quella di 'funzione ricorsiva', anche pensando a un riferimento alla tesi di Church (che, come è noto prevede uno stretto legame tra tali nozioni).
In particolare, l'approccio di Turing all'idea di funzione computabile – con la considerazione di ciò che va ora sotto il nome di 'macchina di Turing' (o, più semplicemente, da un punto di vista didattico, di 'macchina di Post') – è un tema le cui ripercussioni, da un punto di vista generale, tendono sempre più ad amplificarsi in relazione agli sviluppi delle conoscenze in campo informatico, in un'epoca in cui l'idea stessa di 'programma eseguibile' tende a superare qualunque limite immaginativo.

## L’idea di consistenza

In modo analogo possono offrire spunti di carattere didattico altri concetti chiave della logica moderna, quali quello di ‘consistenza’ e di ‘verità’.
Il primo – in stretta relazione con il celebre risultato di 'incompletezza' di K. Gödel sull'impossibilità di ottenere una dimostrazione della consistenza assoluta di una teoria che contenga al proprio interno quella dei numeri interi – può essere connesso a una considerazione didattica del problema della ‘giustificazione’ in campo matematico. Più in particolare, sulla base della differenza tra l’idea di 'consistenza relativa' e di 'consistenza assoluta' di una teoria matematica, ciò può aiutare a mettere in luce la caratterizzazione progressiva e l’aspetto sinottico di vari rami del moderno pensiero matematico, di cui si viene usualmente a conoscenza solo da un punto di vista essenzialmente operativo.
Si tratta di un ambito di idee in cui argomenti di carattere storico e concettuale possono interagire tra loro in modo proficuo. Indicativa al riguardo appare, per esempio, la consapevolezza, che si ha alla fine del XIX secolo, della possibilità di ridurre il problema della consistenza di varie parti della matematica classica al problema della consistenza assoluta della teoria dei numeri interi.

## Il concetto di verità

In modo analogo, la considerazione degli inizi degli aspetti semantici del moderno pensiero logico può permettere di illustrare, anche solo da un punto di vista elementare, il modo in cui un concetto così classico dal punto di vista della tradizione filosofica come quello di ‘verità’ sia stato rivisitato in epoca moderna da un punto di vista logico.
Centrale da questo punto di vista è il ruolo svolto dalle ricerche di Alfred Tarski – in una direzione poi proseguita con la nascita e lo sviluppo della moderna teoria dei modelli nella seconda parte del XX secolo – a partire dal modo in cui egli trattò il concetto di ‘verità’ nel suo *Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati* del 1933. In particolare, come formulazione rigorosa moderna della classica concezione della ‘verità come corrispondenza’, e facendo riferimento a nozioni di base quali quelle di ‘soddisfacibilità’ e di ‘interpretazione’, la definizione data da Tarski permette tra l’altro di mettere nel modo più chiaro in evidenza la differenza tra 'linguaggio' e 'metalinguaggio' di una certa teoria.

## Logica e linguaggio

Un cenno conclusivo deve essere fatto in relazione ai rapporti tra logica e studio del linguaggio, in virtù dell’enorme influenza che, come è ben noto, il pensiero logico ha esercitato in questa direzione su molta della filosofia del Novecento, in particolare di tradizione analitica.
Ciò riguarda in modo più circoscritto gli sviluppi delle ricerche in ambito linguistico, che vedono nel corso del XX secolo un crescente utilizzo di strumenti formali, e in particolare logici. L’esempio più noto al riguardo è sicuramente fornito dalla considerazione formale dei linguaggi naturali sviluppata nelle ricerche di Noam Chomsky, a partire dal suo celebre *Le strutture della sintassi* del 1957. In particolare, da un punto di vista didattico, il lavoro di classificazione dei linguaggi formali svolto in questo contesto, in base alla considerazione delle regole trasformazionali della grammatica di una certa lingua, si presta a una lettura interdisciplinare in cui questioni di carattere formale si legano a considerazioni di natura più specificatamente umanistica; non si deve, infine, dimenticare le importanti implicazioni che le ricerche di Chomsky hanno avuto anche dal punto di vista del

moderno pensiero informatico, in relazione allo sviluppo della cosiddetta ‘linguistica informatica’.

Alfano F., Pascucci F., *Matematica, Informatica, logica, Un percorso organico per un insegnamento unitario*, Bologna, Zanichelli, 1988;
Mangione C., Bozzi S., *Storia della logica*, Milano, Garzanti, 1993;
*Nove lezioni di logica. La logica nel suo sviluppo storico e concettuale*, a cura di Edoardo Ballo, Carlo Cellucci, Maria Luisa Dalla Chiara, Gabriele Lolli, Corrado Mangione, Massimo Mugnai, Padova, Franco Muzzio, 1990.

*Luca Dell'Aglio è docente presso il Dipartimento di matematica dell'Università della Calabria.

## Alan M. Turing

L’inglese Alan Mathison Turing (1912-1954) è una delle personalità centrali della logica matematica del XX secolo. A lui si deve la sistemazione del concetto di *algoritmo* attraverso la definizione di un automa universale – la *macchina di Turing* – in grado di eseguire ogni procedura calcolabile. *Algoritmo* diviene così una qualsiasi procedura per la quale esista una particolare macchina di Turing in grado di calcolarla.
I suoi studi di logica riguardarono soprattutto, quindi, la possibilità di risolvere rigorosamente questioni apparentemente ‘applicative’: stabilire se una funzione è *effettivamente calcolabile*, se è possibile decidere l’*appartenenza* di un dato elemento a un dato insieme, se è possibile *elencare* ordinatamente gli elementi di un insieme, se è possibile dare un definizione *costruttiva* di un oggetto matematico.
Le sue intuizioni e i suoi studi in questa ricerca sono la base teorica dell’attuale informatica: lo schema della *macchina di Turing* ha costituito una tappa fondamentale per il successivo sviluppo dell’architettura logica del moderno computer.
Il suo nome è anche collegato alle prime ricerche in intelligenza artificiale, a partire dal cosiddetto ***Test di Turing***, che egli descrisse nel saggio *Macchine calcolatrici e intelligenza*, pubblicato sulla rivista *Mind* nel 1950. Il test nacque dal suo desiderio di rispondere all’obiezione comune degli intellettuali del periodo sull’impossibilità di stabilire un accostamento tra uomo e macchina, tra automa e mente pensante. Egli non intese certamente sostenere il contrario, quanto piuttosto suscitare alcuni dubbi sulle molte funzioni che noi raggruppiamo nel termine "intelligenza", chiedendosi se alcune di tali funzioni non possano essere ben simulate da un automa esecutore. Per questo propose un test: se un uomo e una macchina pongono domande a un ascoltatore che non li vede, può la macchina comportarsi in modo tale da rendersi irriconoscibile?
Ma, Alan Turing è una personalità affascinante anche per le sue molteplici attività: membro della Royal Society, il prestigioso consesso della scienza britannica, ma anche maratoneta, studioso di codici e decrittazioni, autore della decodifica del codice segreto tedesco ***Enigma*** durante la seconda guerra mondiale. Proprio quest’ultima attività lo mise in contatto con i servizi segreti della sua nazione e lo fece divenire, nel clima di ‘guerra fredda' dei primi anni Cinquanta, una personalità scomoda: fu così che cadde vittima di intrusioni nella sua vita privata, volte a denigrarlo, e giunse al suicidio.

## LOGICA

**Temi:**

Logica e informatica:

Cellucci Carlo, *Logica e informatica*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice V*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 3, 1943, pp. 238-42.

Matematica:

Zellini Paolo, *Matematica*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice V*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 5, 1995, pp. 320-22.
***Teoria degli insiemi e indirizzi astratti della matematica moderna***, in *La Piccola Treccani. Dizionario enciclopedico*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 7, 1995 (s.v.: *Matematica,* p. 301).

**Personaggi**

*Gödel Kurt,* in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice III*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 1, 1961, p. 765;

*Gödel Kurt,* in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice IV*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 3, 1981, p. 885;

*Hilbert David,* in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice II*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 1, 1948, p. 1184;

*Hilbert David,* in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 18, 1951, p. 494;

*Tarski Alfred,* in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice II*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 2, 1961, p. 899;

*Tarski Alfred*, in *Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Appendice V*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 5, 1995, p. 839;

***Turing Alan Mathison***, in *La Piccola Treccani. Dizionario enciclopedico*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 12, 1997, p. 445.

(a cura della Biblioteca dell’Istituto della Enciclopedia Italiana)