I nuovi sviluppo di logica e matematica

1. Logica e matematica tra 800 e 900

Alla metà del XIX secolo la matematica è interessata da un vasto processo di riorganizzazione e chiarificazione. Muovendo dalle ricerche cartesiane, la geometria analitica ha messo in chiaro fin dal 600 come la teoria delle figure e la teoria dei numeri non costituiscano domini separati: l'intero discorso geometrico può essere tradotto in un discorso intorno ai numeri reali, e le verità geometriche ridotte a verità intorno a tali numeri. Nell'800 questo processo di unificazione delle matematiche subisce una decisiva accellerazione.

1. In primo luogo si giunge ad una **rigorizzazione dell'analisi**. L'analisi è scaturita dalle riflessioni di matematici della metà del 600, quali Cavalieri e Pascal, ed è stata elaborata sistematicamente nelle due forme equivalenti del «calcolo infinitesimale» da Leibniz e del «calcolo delle flussioni» da Newton. Rivelatasi essenziale per esprimere le leggi della nuova fisica emersa dalla rivoluzione scientifica, l'analisi si trova ad avere, ancora nell'800, un assetto concettuale piuttosto criticabile, per via dell'ambiguo ruolo giocato da nozioni, quale quella di infinitesimo, mai sufficientemente chiarite e anzi sospettate di essere internamente contradditorie. Nell'800, finalmente, per opera di alcuni matematici, tra i quali spicca il nome del tedesco Karl Weierstrass (1815-1897), l'analisi viene riformulata in termini di concetti non controversi.
2. In secondo luogo, viene attuata l'**aritmetizzazione dell'analisi**. L'impresa della riduzione dell'analisi all'aritmetica viene iniziata dallo stesso Weierstrass e compiuta nel 1872, separatamente ma contemporaneamente, dai matematici tedeschi Georg Cantor (1845-1918) e Richard Dedekind (1831-1916): essi mostrano come i concetti dell'analisi possano essere definiti a partire da concetti aritmetici; gli assiomi dell'analisi divengono così teoremi dimostrabili in seno all'aritmetica. Con ciò, l'intera teoria dei numeri reali (l'analisi) può essere interpretata come una parte della teoria dei numeri naturali (l'aritmetica), così come la geometria aveva potuto essere interpretata come una parte della teoria dei numeri reali. A Cantor è poi dovuto un decisivo chiarimento delle nozione matematica di infinito, con l'abbandono in particolare del presupposto intuitivo della unicità dell'infinito.
3. Ancora nell'800, un processo teorico altrettanto rilevante investe la logica: l'**algebrizzazione della logica**. Alcuni matematici inglesi, infatti, tra i quali spiccano Augustus De Morgan (1806-1871) e soprattutto George Boole (1815-1864), mostrano come le operazioni dell'algebra, mantenendo quasi tutte le consuete leggi (ad esempio della commutatività, della distributività ecc.), potrebbero essere interpretate in maniera da esprimere non operazioni su numeri, bensì altri generi di operazioni: in particolare, operazioni logiche su classi di oggetti. Così, la intersezione di due insiemi si rivela strutturalmente simile alla moltiplicazione di due numeri, la riunione di insiemi alla somma di numeri. In tal modo, una parte della logica può assumere la veste matematica di un tipo speciale di algebra. Il sogno di matematizzare il calcolo logico, coltivato da Hobbes e da Leibniz, trova così nuova plausibilità. La logica matematica può finalmente costituirsi come disciplina sistematica.

2. Il problema dei fondamenti

Il problema dei fondamenti indica le questioni concernenti le basi epistemologiche della logica e della matematica e le garanzie che proteggono dalle antinomie il ragionamento deduttivo. Si tratta di questioni le quali, pur muovendo da difficoltà tecniche, assumono una portata filosofica che travalica di gran lunga il campo delle discipline specialistiche. In linea di massima possono distinguersi tre approcci al problema dei fondamenti: quello del **logicismo**, quello del **formalismo** e quello dell'**intuizionismo**.

Il **logicismo**, i cui esponenti furono G.Frege l'autore dell'*Ideografia* (1878) e dei *Principi dell'aritmetica* (1893-1903) e B.Russell, sosteneva la riduzione della matematica alla logica, nel

senso che, partendo da pochi principi logici, si sarebbe stati in grado di costruire tutta la matematica. In questa prospettiva aveva importanza centrale il concetto di classe o insieme, studiato dai matematici G.Cantor e J.W.R.Dedekind. A mettere in crisi questo approccio fu la famosa antinomia degli insiemi scoperta nel 1902 da Russell e che porta il suo nome. Il filosofo britannico vi pose rimedio con la sua teoria dei tipi, ma ben presto si mostrò che la riduzione della matematica alla logica implicava degli assiomi esistenziali, e per questo motivo essa fu abbandonata.
I **formalisti** sostenevano invece che la matematica e la geometria si muovevano su un piano meramente sintattico, studiando le relazioni tra segni senza significato che solo in un secondo tempo sarebbero stati interpretati. Il pensatore principale di questa scuola è stato D.Hilbert a cui si devono i *Fondamenti della geometria* del 1900. L'intento dei formalisti era quello di dimostrare la coerenza e la completezza dell'aritmetica partendo da una serie di assiomi con un numero finito di operazioni di deduzione logica. Questo programma, nelle sue richieste più radicali, fallì. K.Gödel provò infatti, in una memoria del 1931, l'impossibilità di dare una simile dimostrazione.
Gli **intuizionisti**, il cui principale esponente fu L.E.Brouwer, attribuivano le antinomie al fatto che i matematici parlavano di grandezze che non erano poi in grado di costruire. Questo li portò poi a criticare l'uso indiscriminato del principio del terzo escluso e delle dimostrazioni per assurdo, come pure la regola della doppia negazione. Le posizioni intuizioniste comportano molti sacrifici per i matematici a causa della drastica restrizione del campo delle cose dimostrabili.
Attualmente gli studiosi, più che optare per l'una o per l'altra delle posizioni qui menzionate, preferiscono mettere in rilievo gli aspetti positivi e negativi che ciascuna di esse reca in sé.

3. I fondamenti della matematica

Il problema della fondazione della matematica è stato presente sin dall'antichità e in questo senso la problematica relativa va inquadrata nella più ampia teoria della conoscenza. Ma nel sec. XIX il sorgere delle geometrie non-euclidee, da una parte, e la tendenza dei matematici di quel secolo a rendere sempre più rigorose aritmetica e analisi, dall'altra, determinavano un nuovo interesse e una più approfondita impostazione per il problema dei fondamenti della matematica che non investivano più semplicemente il problema dell'inserimento di questa scienza in un contesto filosofico più ampio, ma lo stesso operare matematico.
Le esigenze di maggior rigore verso l'aritmetica e l'analisi si traducevano nella necessità di una assiomatizzazione e nell'utilizzazione dei concetti della teoria dei numeri naturali quale base per definire i concetti dell'aritmetica e dell'analisi. Veniva così in primo piano il problema di giustificare i principi e gli asserti della matematica in modo rigoroso; si trattava cioè di rendersi conto di cosa si intendeva quando si affermava che certi principi erano evidenti, di esplicitare le motivazioni per cui principi non completamente evidenti venivano accolti e di trovare e quindi abbandonare quei principi che non si potevano giustificare. Concorreva al nuovo atteggiamento verso la matematica la fine del predominio della geometria, dovuta al venir meno del carattere assoluto e descrittivo dei suoi assiomi e alla riformulazione su basi astratte di nozioni, come quelle di continuità e di numero reale, in precedenza formulate su basi geometriche. Si delineavano così verso la fine del secolo due posizioni contrastanti. Da una parte stavano i lavori di R.Dedekind, la teoria degli insiemi di G.Cantor, il tentativo di G.Frege di fondare la matematica su basi puramente logiche. Dall'altra stava L.Kronecker e la sua concezione costruttivistica della matematica. Per Dedekind, Cantor, ecc. era possibile considerare come matematicamente sensata ogni nozione specificabile in termini della teoria astratta degli insiemi (si pensi alla teoria dei cardinali e degli ordinali di Cantor, a quella degli ideali di Dedekind); per Kronecker, al contrario, tutti questi sviluppi erano privi di senso, meri giochi verbali, in quanto non era possibile per tutte queste teorie fornire una traduzione in termini di proprietà di numeri naturali.
Agli inizi di questo secolo, la scoperta delle antinomie poneva in luce come le nozioni di classe e di insieme, che stavano alla base dei tentativi di fondazione di Cantor e di Frege, portavano a delle contraddizioni se impegate senza restrizioni. Si apriva così la crisi dei fondamenti in quanto veniva posta in discussione sia la ricostruzione su basi logiche della matematica operata da Frege, sia la

fondazione cantoriana di una matematica astratta imperniata appunto sulla nozione di insieme. Le ricerche si volsero allora ad affrontare quelli che erano i problemi sollevati dalle antinomie e a una loro eventuale eliminazione, senza peraltro conseguire risultati soddisfacenti. Emergevano allora tre filoni principali di ricerca il cui punto di contatto può individuarsi nel tentativo di evitare quelle assunzioni che comportavano l'emergere delle antinomie. Essi erano: il **logicismo**, che soprattutto per opera di B.Russell riprese il programma di Frege superando le antinomie con la costruzione della teoria dei tipi; l'**intuizionismo**, propugnato da L.E.J.Brouwer, che riprendendo le riserve di Kronecker si pose il compito (tuttora in atto) di costruire una matematica per molti versi diversa da quella tradizionale e fondata sul concetto di costruzione mentale (definita passo per passo); il **formalismo**, il cui maggiore esponente negli anni Venti fu D.Hilbert, che cercò sulla base del concetto di sistema formale di giustificare su base finitista la matematica classica. Ma anche questi tentativi di trovare una soluzione definitiva ai problemi dei fondamenti della matematica furono frustrati dalla scoperta del teorema di incompletezza di K.Gödel (1931). Questo risultato poneva fine ai programmi generali di fondazione della matematica nel senso della dimostrazione matematica (formale) della non contraddittorietà di teorie formali. La ricerca sui vari temi in essi contenuti continuò e si può constatare come nella ricerca logica posteriore al 1930 il problema dei fondamenti passi sullo sfondo, senza però dissolversi. In particolare, le antinomie della teoria degli insiemi sono superate in modo soddisfacente dalle teorie assiomatiche di Zermelo-Fraenkel e di von Neumann-Bernays.

4. Una definizione dei fondamenti della matematica

Si tratta di indagini critico-razionali circa i concetti basilari della matematica e della metamatematica, quali per es. quello di numero, di calcolo, di insieme, di dimostrazione ecc.

In un senso più ristretto i fondamenti della matematica sono una branca della stessa matematica costituita da uno specifico gruppo di discipline (teoria degli insiemi, teoria delle funzioni ricorsive, teoria dei modelli ecc.) ciascuna delle quali, in piena autonomia metodologica, trae la sua origine storica da indagini del tipo suddetto.

Nella prima accezione i fondamenti della matematica costituiscono la novecentesca filosofia della matematica. Ma alcuni identificano questa esclusivamente con la problematica dei fondamenti della matematica nel secondo più tecnico e specialistico senso.