Gauss, Reimann, Poincaré e Hilbert
La matematica diventa scienza

1. Introduzione

Dire «matematica dell'Ottocento» è come dire «romanzo dell'Ottocento». Prima dell'Ottocento, certo, sono stati scritti romanzi, sono vissuti grandi romanzieri, ma abbiamo a che fare per lo più con figure isolate: pensiamo a Cervantes, a cavallo tra il Cinquecento e il Seicento, oppure a Sterne, nel Settecento. E nell'Ottocento che nasce il romanzo così come oggi lo intendiamo; successivamente, nel corso del Novecento il romanzo si è sviluppato con quel rigoglio che tutti ben conosciamo. Nello stesso modo possiamo pensare alla matematica: è nell'Ottocento che la matematica nasce come scienza quale noi oggi la conosciamo, cioè indipendente, consapevole di se stessa, ricca di connessioni interne, articolata nelle sue sottodiscipline: la geometria, 1'analisi, l'algebra, per citare quelle fondamentali. Percorreremo questo secolo considerando quattro figure principali: Gauss, Riemann, Hilbert e Poincaré.

2. Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss è una figura di passaggio: collega, infatti, la matematica del Settecento alla matematica dell'Ottocento; potremmo dire che è uno scienziato in, bilico tra l'Illuminismo e il Romanticismo. Gauss da prova del suo genio fin da giovanissimo:, nel 1796 risolve un difficile problema geometrico, cioè costruisce con riga e compasso un poligono regolare di diciassette lati. Naturalmente, ciò non vuol dire che si metta lì sul serio, con la riga e il compasso, a fare la costruzione; significa che traduce il problema in un problema algebrico e mostra che questo è risolubile. Più o meno in questi stessi anni, Gauss si interessa allo studio delle soluzioni (i matematici dicono «radici») delle equazioni polinomiali: in particolare dà in questo ambito la prima dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra, il quale stabilisce che un polinomio di grado n ha tante radici quante il suo grado.

Nel 1798 (quando ha appena ventun'anni) Gauss porta a termine la stesura delle celebri *Disquisitiones arithmeticae*, che saranno pubblicate nel 1801. Si tratta del testo fondatore della moderna teoria dei numeri, un testo che influenzerà profondamente tutti i matematici dell'Ottocento e anche quelli del Novecento: oggi, a distanza di più di due secoli, le Disquisitiones di Gauss sono ancora oggetto di studio. Ma Gauss, impregnato di cultura illuministica, ha una visione enciclopediaca della scienza: non si occupa soltanto di matematica ma anche di fisica, astronomia, cartografia ecc. Nel 1801 un astronomo italiano, Giuseppe Piazzi, osserva nel cielo un nuovo corpo celeste, ciò che oggi chiamiamo un asteroide: è Cerere. Ma di questo «pianetino» si perdono le tracce. Come fare a ritrovarlo nel cielo notturno? Gauss inventa una teoria per descrivere le orbite dei pianeti in maniera efficiente, a partire da poche osservazioni, e per correggere gli eventuali errori sperimentali; in questo modo non solo si guadagna fama europea perché Cerere viene di nuovo identificato nel cielo, ma pone le basi della moderna teoria degli errori, descrivendo per la prima volta la distribuzione statistica: importantissima, che oggi è detta, appunto, distribuzione gaussiana. Si tratta di un passo fondamentale nel lungo processo di elaborazione della moderna teoria della probabilità.

Tra il 1818 e il 1832 Gauss, che si è trasferito a Gottinga, è impegnato in un'opera colossale, nella quale oggi non penseremmo di vedere intento un matematico: il rilevamento cartografico del regno di Hannover. Si tratta di un'impresa grandiosa - a comprovarlo basterebbe il fatto che essa assorbirà, per numerosi anni, quasi tutte le energie di Gauss - per la quale è necessario fissare una serie di punti di riferimento in una regione piuttosto vasta, effettuare triangolazioni, prendere misure sia di distanza sia di altitudine e infine rielaborare tutti i dati raccolti e riportarli su una carta geografica. Ovviamente, oltre ai problemi teorici, ci sono vari problemi pratici che si pongono a chi voglia realizzare un lavoro di questo genere: per fissare, come dicevamo, dei punti di riferimento, bisogna attraversare boschi e vallate, valicare le eventuali montagne che si frappongono ecc. Gauss non si sottrae a questo impegno più «atletico»: ci viene descritto mezzo sudato, che si inerpica sulle colline, che marcia per i boschi. Non dobbiamo dunque immaginarlo con la papalina di velluto seduto alla scrivania di casa; no, Gauss è anche uno scienziato che sa darsi da fare sul campo. Però c'è anche un difficile lavoro teorico da svolgere: si tratta di comporre questa massa enorme di dati, che si accumulano negli anni, per costruire una carta geografica il più possibile accurata. Spesso si dimentica che la cartografia è una scienza, e nel Settecento diventa una scienza ancillare alla matematica: sono stati Eulero, uno dei più grandi nomi della matematica del Settecento, e un altro personaggio meno noto che si chiama Johann Heinrich Lambert, un poliedrico scienziato nativo di Mulhouse (città che all'epoca faceva parte della Confederazione Elvetica), a porre i fondamenti matematici della cartografia.

È probabilmente dal suo impegno come cartografo che prendono avvio gli studi geometrici di Gauss, rivolti in particolare a quella disciplina che oggi chiamiamo geometria differenziale. Egli risolve un problema puramente cartografico, ovvero il problema della rappresentazione conforme di una regione. Che cosa vuol dire «conforme»? Significa che una certa porzione della crosta terrestre è rappresentata su una carta in modo tale che gli angoli tra le varie direzioni non siano alterati. Ovviamente in questo modo si distorcono, per esempio, le lunghezze, ma gli angoli vengono, appunto, rappresentati in maniera assolutamente fedele.

È dunque un problema matematico quello che Gauss affronta e risolve nel 1822. Sulla scia di queste ricerche pubblica nel 1827 le *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, «*Disquisizioni (o, meglio, investigazioni) generali a proposito delle superfici curve*». E’ questa un’opera della quale non si corre il rischio di esagerare l'importanza, in quanto rappresenta il fondamento della moderna geometria differenziale. In particolare, Gauss spiega come si possa studiare una superficie, quindi un oggetto a due dimensioni, in maniera intrinseca, cioè guardandola come se ci vivessimo sopra, come se fossimo delle formiche costrette a muoversi su di essa, senza considerare l'esistenza di una terza dimensione, e introduce delle nozioni matematiche atte a descrivere le proprietà intrinseche delle superfici; in particolare, definisce la nozione che permette di esprimere le distanze fra i punti (cioè, la cosiddetta «*prima forma fondamentale*») e soprattutto l'importantissimo concetto di curvatura.

Le ricerche geometriche di Gauss vanno inquadrate in un contesto più ampio. Come si sa, Euclide fondò la geometria nei suoi Elementi a partire da una serie di postulati, cioè di richieste, e di nozioni comuni, oltre ovviamente alle definizioni di base, quelle che ancora oggi si studiano a scuola, di punto, di retta e di piano. Tra i postulati di Euclide ce n'è uno che si differenzia dagli altri perché meno intuitivo, il famoso quinto postulato, di cui non vi darò l'enunciato originale, che è abbastanza intricato. Ricorderò semplicemente che questo postulato asserisce che, dati una retta e un punto fuori da questa retta, esiste una e una sola parallela alla retta data che passi per quel punto: si tratta, appunto, del «postulato delle parallele». Questo postulato è più complicato, nella sua formulazione, degli altri, e fin dall'antichità ci fu chi dubitò della sua indipendenza dagli altri postulati, domandandosi se esso non fosse un teorema. È forse possibile dimostrarlo a partire dalle nozioni comuni e dagli altri postulati degli *Elementi*? È possibile - e qui, però, arriviamo a un livello più speculativo - costruire delle geometrie che siano indipendenti dal quinto postulato? Bene, nel Settecento tentativi involontari, direi, di costruire delle geometrie non euclidee, cioè indipendenti dal quinto postulato, furono fatti dal gesuita italiano Saccheri, che pubblicò un’opera nel 1733 intitolata *Euclide liberato da ogni macchia* (*Euclides ab omni naevo vindicatus*), e poi da quello stesso Lambert che abbiamo già citato prima, il quale scrisse un’opera proprio sulla teoria delle parallele, introducendo delle idee molto originali, basate in parte proprio sulle sue ricerche cartografiche. E attestato che, a Gottinga, quando era studente, Gauss lesse l'opera di Lambert, e lui stesso racconta in molte delle sue lettere che si interessò al problema delle parallele fin dagli anni Novanta del Settecento. Ma che cosa c'entrano le nuove ricerche geometriche, astratte, che abbiamo descritto in precedenza, quelle per esempio nelle quali compare la prima forma fondamentale o il concetto di curvatura, con il vecchio e annoso problema delle parallele? In un certo senso sono lo stesso problema. Questa è una delle grandi conquiste della scienza, anzi del pensiero dell'Ottocento: avere capito come affrontare e risolvere il problema delle parallele, ovvero come costruire geometrie diverse da quelle euclidee. In effetti, intorno agli anni Trenta, due matematici ai margini della comunità scientifica più influente, János Bolyai, nato in Transilvania, e Nikolaj Lobaèevskij, che vive a Kazan', nelle steppe della Russia, riescono a elaborare una nuova geometria non euclidea: introducono, cioè, a livello formale, delle nozioni comuni e degli assiomi e, a partire da questi, sviluppano una geometria (detta iperbolica) nella quale la proprietà che una retta abbia una e una sola parallela passante per un punto dato non è più valida.

Non a questi matematici, tuttavia, ma direttamente a Gauss si ricollega Riemann, che estende e generalizza i risultati delle *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, risolvendo in maniera definitiva la questione della rappresentazione dello spazio.

3. Bernhard Riemann (1826-1866)

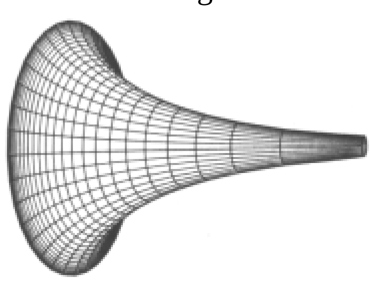
Bernhard Riemann, un altro matematico tedesco - ne incontreremo molti in questo nostro viaggio nell'Ottocento matematico - ha una vita relativamente breve; morirà infatti a neanche quarant' anni. Oggi lo ricordiamo soprattutto per l'«ipotesi di Riemann», che riguarda un problema di teoria dei numeri. E noto fin dai tempi di Euclide che i numeri primi sono infiniti; un numero intero positivo maggiore di 1 (1 fa eccezione) si dice primo se si può dividere soltanto per 1 o per se stesso. Quindi, 2 è un numero primo, così come 3, 5, 7 ... ; ma come continua questa progressione dei numeri primi? Si tratta di una questione estremamente difficile che impegna i matematici fin dall'antichità, potremmo dire, ma riceve una formulazione chiara soltanto nel corso del Settecento (soprattutto grazie ai contributi di Eulero). Si osserva, anche in maniera sperimentale, che a mano a mano che i numeri primi diventano sempre più grandi, diventano anche sempre più radi, cioè la distanza fra un numero primo e il successivo diventa sempre maggiore: è possibile descrivere - questo è il problema - la distribuzione dei numeri primi tra i numeri interi, esiste cioè una legge che ci dica qual è il numero primo successivo a un dato numero primo anche molto grande? L'ipotesi di Riemann è un enunciato che riguarda esattamente la distribuzione dei numeri primi. La sua formulazione è molto complicata e fa entrare in gioco uno degli strumenti teorici più sofisticati messi a punto dalla matematica dell'Ottocento, l'analisi complessa. Il termine «analisi» è grosso modo sinonimo di «calcolo differenziale e integrale», mentre con l'aggettivo «complessa» si fa riferimento al fatto che questo «calcolo» riguarda i numeri complessi, cioè non i numeri reali (le grandezze, cioè, con le quali siamo abituati a trattare più comunemente), ma quelle strane grandezze immaginarie che, pur avendo già fatto il loro ingresso nella matematica nel Cinquecento, erano diventate di casa soltanto nel Settecento; per esempio, Gauss se ne era servito proprio per dare la dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra. L'analisi complessa è lo strumento principe con il quale, in maniera inaspettata, Riemann formula la sua soluzione ipotetica, congetturale, della distribuzione dei numeri primi. L'ipotesi di Riemann è a tutt'oggi ancora da dimostrare, è uno dei famosi problemi del millennio individuati e proposti dal *Clay Mathematics Institute*; chi lo risolve guadagna un milione di dollari, ma non è certo questo il premio più appetibile per un matematico, bensì è la gloria futura.

Diventare professore nella Germania di metà Ottocento non è facile: Riemann deve prima presentare una dissertazione di abilitazione e, già in questa, dà contributi importanti all'analisi matematica, in particolare fondando quella che è la moderna teoria dell'integrazione; successivamente deve discutere a voce una lezione di abilitazione. Nel 1854, davanti al corpo docente dell'università Gottinga, Riemann tratta del seguente argomento: *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*. Bisogna tenere presente che tra il pubblico è seduto Gauss, ormai anziano (morirà l'anno successivo, nel 1855), ma ancora vigile. La lezione di Riernann è un omaggio, nemmeno tanto implicito, a Gauss e alla sua opera: più volte ricorre l'espressione «*come ha dimostrato il consigliere aulico Gauss*» o «*come si trova scritto nelle opere del consigliere aulico Gauss*». L'opera geometrica di Riemann è una continuazione di quella di Gauss. Riemann riesce infatti a elaborare gli strumenti teorici per affrontare e risolvere il problema che a Gauss era sfuggito: l'espressione, cioè, delle due nozioni matematiche fondamentali - la prima forma fondamentale, quella che ci permette di esprimere la distanza fra i punti, e la curvatura - non solo nel caso di superfici ma anche di uno spazio tridimensionale e, ancora più in generale, di spazi astratti a un numero arbitrario di dimensioni. La lezione di Riemann, che verrà pubblicata (postuma) solo nel 1867, è molto astratta, difficile, criptica, le nozioni rimangono soltanto abbozzate. Non ci sono calcoli in questo scritto, ma idee. Riemann si spinge molto avanti; la sua ambizione non è soltanto quella di risolvere problemi matematici, per quanto questi possano essere antichi e nobili, ma anche di capire qualcosa sulla natura dello spazio, affrontando questioni di ordine sia fisico sia filosofico. In questo senso, Riemann si inserisce all'interno di quella corrente del pensiero ottocentesco che in Germania va sotto il nome di *Naturphilosophie*, «*filosofia della natura*». Riemann riflette anche sulle implicazioni che le nuove idee che sta elaborando possono avere in fisica e si chiede, per esempio: «*Ma, su larga scala, l'universo quale forma possiede alla luce delle teorie da me sviluppate? Si può dire che l'universo abbia una qualche struttura geometrica? Che sia curvo in qualche senso? Che sia infinito o, piuttosto, illimitato (facendo una distinzione molto sottile fra questi due concetti)? E invece, se vado a vedere nel piccolo, alle scale atomiche (come diremmo noi oggi, ma ovviamente Riemann non parla questo linguaggio), questa geometria ha ancora valore?*». La riflessione filosofica di Riemann avrà un'importanza decisiva per la scienza dei decenni successivi: nella sua lezione di abilitazione viene stabilito per la prima volta quel legame profondo fra la geometria e la fisica che troverà nella teoria della relatività generale di Einstein la sua espressione compiuta.

In un certo senso, dopo Riemann non si può più parlare di geometria, al singolare, bensì di geometrie, al plurale. C'è chi ha visto in questo una sconfitta di quello che era il programma di Kant, che considerava le proposizioni geometriche come «*giudizi sintetici a priori*». Non c'è più un «*a priori*» geometrico: la geometria è molteplice, è plurale, ci sono infiniti modi in cui si possono articolare gli «*spazi*» - in matematica si usa il termine «*varietà*», inventato o, per meglio dire, introdotto da Riemann proprio nella sua lezione del 1854 (non dico «*inventato*» perché in realtà chi per primo si è servito di questa parola è stato Gauss).

Dicevamo che la lezione di Riemann viene pubblicata dopo la sua morte, nel 1867, ed è precisamente dopo questa data che avviene la grande esplosione delle geometrie non euclidee. Fino ad allora le ricerche che abbiamo descritto, sia quelle di Gauss sia quelle di Riemann, ma anche le scoperte di Bolyai e Lobačevskij, erano rimaste confinate in una cerchia piuttosto ristretta. A partire dagli anni Settanta dell'Ottocento, invece, l'eco delle geometrie non euclidee, di questa stranezza della matematica, si fa sentire anche all'esterno dei circoli matematici; per esempio, troviamo un accenno alle geometrie non euclidee nel romanzo *I fratelli Karamazov* di Dostoevskij: troviamo delle costruzioni non euclidee, a volerle cercare, anche in alcune bizzarrie dell'Alice di Lewis Carroll, che pure avversava queste novità geometriche.

Una tappa fondamentale nell'affermazione delle nuove geometrie è il modello di geometria non euclidea messo a punto da un matematico italiano, **Eugenio Beltrami**, nel 1868. Beltrami considera una strana superficie, la pseudosfera, che si ottiene facendo ruotare una certa curva (la trattrice) attorno al suo asse verticale: ne risulta una specie di megafono molto allungato. Sulla scia di Gauss, Beltrami studia la geometria intrinseca di questa superficie e scopre che coincide con la geometria di Bolyai e Lobačevskij. Per questa ragione si dice che Beltrami dà per la prima volta la dimostrazione che le scoperte di Bolyai e Lobačevskij - queste strane creature dell'intelletto - in realtà sono coerenti, stanno in piedi tanto quanto sta in piedi la geometria euclidea, proprio perché possiamo fame un modello matematico che vive nel consueto spazio tridimensionale. E così possibile stabilire un ponte tra questo nuovo regno della geometria e la matematica «normale» - l'analisi, l'algebra, la fisica matematica ecc. Nel 1872 un matematico tedesco, **Felix Klein**, nella lezione inaugurale all'università di Erlangen pronuncia un celebre discorso, passato alla storia con il nome, appunto, di



«*programma di Erlangen*»: è una riflessione sulla geometria dall'interno. Klein non ha inclinazioni filosofiche, al contrario di Riemann, ma dobbiamo riconoscergli il merito di aver saputo mettere insieme tanti pezzi, ricostituendo un mosaico nel quale compare la geometria in tutte le sue forme: c'è la geometria euclidea, c'è la geometria non euclidea, c'è la geometria di Riemann - e quindi quella di Gauss -, ci sono le ricerche di Beltrami, e poi c' è un altro dominio di grande interesse, la geometria proiettiva (che deriva dagli studi prospertici e si è sviluppata come disciplina autonoma all'incirca dall'inizio del secolo). Klein riesce a identificare l'elemento comune a tutte queste diverse geometrie, a tutti questi modi diversi di declinare il termine «geometria». E qual è questa chiave? È il concetto di «gruppo di trasformazioni». Nelle diverse geometrie sottoponiamo le «figure» - parola che qui intendo in senso lato - a certe trasformazioni; bene, ciascuna geometria si caratterizza perché studia quali proprietà rimangono invarianti rispetto a certe trasformazioni e non ad altre.

Il concetto di gruppo di trasformazioni in connessione con la geometria si ritrova anche in **Hermann Helmholtz**, che, verso la fine degli anni Sessanta dell'Ottocento, indirizza una sorta di risposta a Riemann. Riemann ha scritto *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, Helmholtz replica con un testo che intitola *Sui fatti che stanno alla base della geometria*. Helmholtz non è un matematico di mestiere, è principalmente un fisiologo - la sua prima scoperta importante è la misura della velocità di propagazione dell'impulso nervoso in una rana -, però in quel periodo in Germania ci sono ancora personaggi capaci di spaziare sull'intero universo delle scienze. Helmholrz si interessa alla percezione acustica e visiva interrogandosi sulla natura dello spazio; la sua domanda di fondo è: come possiamo ricostruire lo spazio, arrivare a conoscere la sua struttura geometrica, a partire dalle nostre esperienze? E qual è la nostra esperienza fondamentale in questo ambito? Bene, è la nostra esperienza di spostare liberamente i «corpi rigidi», cioè gli oggetti che non si possono deformare. Studiando questo particolare gruppo di invarianza possiamo dunque ottenere informazioni sulla struttura geometrica dello spazio che ci circonda.

4. Jules-Henri Poincaré (1854-1912)

Jules-Henri Poincaré (finalmente un matematico francese, dopo tanti tedeschi) è una delle due importanti figure di passaggio tra l'Ottocento e il Novecento; l'altra, come vedremo, è Hilbert. Poincaré nasce nel 1854, lo stesso anno di nascita di Arthur Rimbaud, il grande poeta francese, che in una sua lettera ci ricorda come le invenzioni dell'ignoto reclamino delle forme nuove. Queste parole possono essere usate per descrivere l'opera matematica di Poincaré. Avventurarsi per la prima volta in territori che mai nessuno ha esplorato richiede delle forme nuove, cioè dei nuovi concetti, delle nuove idee.

Poincaré svolge un grande lavoro di sintesi, tira in un certo senso le fila degli sviluppi più disparati della matematica ottocentesca, riuscendo a evidenziare la trama sottostante e svelando le connessioni nascoste; nello stesso tempo, guarda in avanti, e si sposta da un problema all'altro con una velocità a volte vertiginosa. È anche stato criticato sia dai suoi contemporanei sia (in maniera francamente un po' ridicola) dai posteri per questa sua bulimia della scoperta, che spesso lo porta a non essere troppo accurato: non riguarda mai le bozze dei suoi lavori, commette alcuni piccoli errori, ma non se ne preoccupa, pensando che tanto altri li correggeranno.

Poincaré è il primo a fare uso delle geometrie non euclidee per nsolvere problemi di analisi complessa. Ancora una volta la matematica si dimostra una scienza di intrecci, di interrelazioni. Le grandi scoperte matematiche spesso non sono costituite dai teoremi in quanto tali, ma dal fatto di creare ponti fra discipline che prima si pensavano separate, e in questo Poincaré è un maestro. Per fare un altro esempio, egli capisce le potenzialità della teoria dei gruppi e la usa frequentemente.

La teoria dei gruppi nasce con **Évariste Galois**, una figura che sembra uscita da un romanzo di Stendhal (muore a ventun'anni in duello, dopo essere stato in prigione perché aveva partecipato ai moti rivoluzionari nel 1830). Galois lascia un solo lavoro, sulla teoria delle equazioni algebriche, nel quale introduce uno strumento nuovo, la teoria dei gruppi, appunto. L'opera di Galois è pubblicata soltanto postuma, ed è dalla metà dell'Ottocento in poi che la teoria dei gruppi prende rilievo. I gruppi possono essere, come dicono i matematici, discreti (cioè composti da un numero finito o infinito di elementi nettamente «scollegati» gli uni dagli altri) oppure conunui.

Bene, tutti questi vari aspetti si riuniscono in Poincaré, il quale non dedica nessuno studio specifico alla teoria dei gruppi, ma la usa in un gran numero dei suoi lavori, un pò come il collante che tiene insieme molte delle sue idee. In particolare, sfrutta questa teoria, in alcune ricerche di fisica, per risolvere un problema relativo al moto dell'elettrone (siamo già agli inizi del Novecento) e sviluppa una teoria che non viene in genere legata al suo nome: la teoria della relatività. In effetti, questa viene enunciata in maniera differente, ma equivalente, da Einstein e da Poincaré nello stesso anno, il 1905.

Nell'ultimo scorcio del Seicento Newton aveva posto il calcolo (differenziale e integrale) a fondamento della nuova meccanica, che offriva un quadro unitario e coerente nel quale studiare i fenomeni fisici. Nel corso del Settecento la meccanica newtoniana trova applicazioni nella descrizione dell' evoluzione di un gran numero di sistemi particolari - dai fluidi ai corpi rigidi in rotazione - e soprattutto nello studio del moto dei pianeti: la meccanica celeste, nelle opere di Laplace e Lagrange, diventa una delle glorie della scienza illuministica. Un problema rimane però senza soluzione: il problema dei tre corpi. Newton aveva risolto il problema dei due corpi, descrivendo con precisione le traiettorie di due corpi che interagiscono fra loro mediante l'attrazione gravitazionale così come prescritto dalla legge di Newton (possiamo pensare a un pianeta e a un suo satellite, oppure a un pianeta che orbita attorno al Sole: in entrambi i casi i due corpi «ruotano» attorno alloro comune centro di gravità). Ma cosa succede se i corpi in gioco sono tre, oppure in numero ancora maggiore, come succede per esempio nel sistema solare? Applicando i principi della «filosofia naturale» di Newton possiamo scrivere le equazioni che governano il loro moto, è abbastanza facile. Ma sappiamo risolverle? Sappiamo descrivere con accuratezza le traiettorie di tre o più corpi celesti che si attraggono vicendevolmente secondo la legge di Newton? No. Questo problema attraversa tutto il Settecento e tutto l'Ottocento. Nessuno riesce a risolvere queste equazioni; si trovano solo delle soluzioni approssimate che permettono di prevedere (con un certo grado di imprecisione) dove il tal pianeta si troverà in un certo momento; si tratta di quegli stessi calcoli che anche Gauss ha usato nella sua teoria del moto per ritrovare il pianetino Cerere sperduto nel cielo notturno. Ma qual è il nocciolo teorico, concettuale, della questione? Poincaré affronta questo problema a metà degli anni Ottanta e trova una risposta inaspettata: il problema non ha soluzione. E intrinsecamente impossibile risolvere il problema dei tre corpi grazie a funzioni che descrivano il moto dei corpi coinvolti in maniera completa, infinitamente precisa, «analitica» (questo è il termine tecnico). C'è qualcosa di oscuro, in un certo senso, nel cuore stesso della più classica delle scienze moderne, la meccanica. Questa è fondata sul determinismo: se ho una causa, ho un effetto; ho delle equazioni, queste equazioni si risolvono e le soluzioni sono uniche. Poincaré scopre che nel caso del problema dei tre corpi dobbiamo rinunciare a trovare soluzioni «analitiche»; dobbiamo accontentarci semplicemente di avere soluzioni approssimate, approssimate quanto vogliamo, ma incapaci di generare previsioni a lungo termine. Ecco che all'interno di questo impianto deterministico si insinua in maniera larvata l'indeterminismo sotto forma di incapacità di fare previsioni - predizioni, dicono gli scienziati - a lungo termine. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (1892-99), la grande opera di Poincaré dedicata alla meccanica celeste (tre volumi ponderosi), non solo fonda le basi concettuali della teoria, ma contiene in nuce quelli che saranno gli sviluppi novecenteschi, posteriori addirittura al 1950; è in quest' opera di Poincaré che troviamo per la prima volta, non menzionato con il suo nome, il concetto di caos.

Nelle abili mani di Poincaré anche la geometria subisce una trasformazione radicale. Abbiamo visto che già con Riemann si parla di spazi astratti (varietà) che possono avere una, due, tre, quattro, n dimensioni e le cui strutture metriche possono essere le più complicate possibili: spazi eventualmente curvi, con buchi ecc. Ma si può fare un passo ulteriore verso l'astrazione. I matematici non ricercano l'astrazione per l'astrazione, non sono persone che vogliono a tutti i costi complicarsi la vita: fissano la loro attenzione su problemi che hanno una lunga storia e cercano di andare al fondo delle cose, proprio per poter stabilire quei ponti, quei legami di cui dicevamo. E soltanto spogliando i problemi di ciò che non è essenziale, riducendo li all' osso, che si vedono le interconnessioni nascoste.

Poincaré è l'inventore della moderna topologia, di cui getta le fondamenta con le cinque grandi memorie dedicate all'*analysis situs* (così si chiamava ancora nell'Ottocento questa disciplina). La topologia nasce in realtà con Leibniz, quindi già nel Settecento, e prosegue con Eulero, il quale però affronta soprattutto problemi relativi a grafi, quindi molto lontani dalla geometria come la si intende di solito. E soltanto nell'Ottocento che si fanno i primi, timidi tentativi di collegare la topologia - 1'*analysis situs*, dovremmo dire - alla geometria. Importante è il nome di **August Möbius**, che ricordiamo per il famoso nastro che si ottiene prendendo una strisciolina di carta e incollando ne gli estremi dopo averla torta su se stessa: si realizza in questo modo una superficie con una sola faccia, il nastro di Mòbius, appunto (e qui bisognerebbe ricordare anche lo studioso tedesco Walther von Dyck). Ma è Poincaré che trasforma l' analysis situs in qualcosa di veramente diverso, la topologia nel senso moderno, legandòla a doppio filo con la geometria. Qui la lezione che si trae dalla teoria dei gruppi è importantissima. Che cosa studia la topologia? Studia proprietà geometriche che vengono lasciate invariate sotto trasformazioni molto generali: possiamo distorcere le figure e gli spazi a nostro piacimento, basta non romperli, ma per il resto possiamo operare su di loro in tutti i modi, come su una massa di plastilina. È difficile credere che questa sia ancora matematica; Poincaré però ha l'occhio acuto e ci dice: «*La topologia è 1'arte di ragionare bene su figure disegnate male*», e lo dice con un pizzico di auto ironia, perché gli unici voti brutti che ha preso nella sua vita sono appunto in disegno, mentre per il resto era ovviamente il primo della classe. Chiariamo anzitutto che cosa si intenda con il termine «invariante». Prendiamo, per esempio, una sfera di dimensione 2, cioè a due dimensioni, come la superficie di una palla. Il 2, che indica il «numero di dimensioni», è un invariante: possiamo stiracchiare, gonfiare la nostra palla quanto vogliamo, ma le dimensioni sempre due restano. Il raggio non è un invariante, perché se gonfiamo la palla il raggio cambia. Anche la «forma» della sfera, per quanto paradossale possa sembrare, non è un invariante topologico: infatti, possiamo schiacciare la palla e farla diventare un ellissoide, oppure possiamo darle la forma di una pera, tutto questo è concesso nel regno un po' folle della topologia. Ciò che non possiamo fare è bucarla praticando un foro nella sua superficie. In questo senso, una sfera e una ciambella sono profondamente diverse; il numero dei buchi è un invariante: la ciambella ne ha uno, la sfera zero. Nell'ambito della topologia Poincaré enuncia uno dei suoi problemi più famosi, la congettura di Poincaré. E possibile, in alcuni casi specifici (cioè, in opportune ipotesi), ricostruire gli spazi a partire dagli invarianti? La questione potrà sembrare astratta e forse anche un pò bizzarra, però è vitale per capire a fondo il concetto di invariante e costituirà il punto di riferimento, anzi, il faro che guiderà la ricerca matematica in questo settore per tutto il Novecento. In effetti, la congettura di Poincaré per le sfere di dimensione 3 - per le sfere di dimensione superiore è stata dimostrata prima (paradossalmente è più facile districarsi in un numero elevato di dimensioni, perché c'è più spazio per l'immaginazione matematica e quindi anche per la messa a punto di strumenti teorici) - è stata dimostrata soltanto nel 2002 da un matematico russo **Grigorij Perel'man**. Per questo risultato a Perel'man è stata assegnata la medaglia Fields - che ha rifiutato - e il premio da un milione di dollari messo in palio dal Clay Institute - anche questo rifiutato.

5. David Hilbert (1862-1943)

L'altra figura di matematico universale che nasce nella seconda metà dell'Ottocento è David Hilbert, di nuovo un matematico tedesco. A Hilbert spetta il compito di chiudere l'Ottocento e aprire il Novecento, presentando a Parigi, al Congresso internazionale dei marematici che si svolge in concomitanza con l'Esposizione universale del 1900, una famosa lista di problemi che, appunto, vogliono rappresentare non solo quanto all’epoca, ancora non è stato compreso in matematica, ma soprattutto indicare una pista da seguire per gli studiosi delle generazioni successive. Dobbiamo immaginarci anche la cornice: estate del 1900, agosto, caldo, Esposizione universale di Parigi, un evento colossale, oltre cinquanta milioni di visitatori paganti ai vari eventi (noi pensiamo ingenuamente che solo la nostra epoca sappia produrre eventi di questa portata e di queste dimensioni, ma già alla fine dell'Ottocento non scherzavano). Il giovane Hilbert, non ancora quarantenne in un'austera aula della Sorbona, si cimenta con un compito non facile: quello, appunto, di dare un elenco preciso di problemi, non di tenere un discorso generale di filosofia, e di affermare: «*Ecco, egregi signori, questi sono i problemi che la matematica del secolo che abbiamo alle spalle ci consegna in eredità e che i matematici futuri dovranno affrontare*». I problemi presentati a Parigi da Hilbert sono dieci; soltanto nella versione scritta della sua conferenza i problemi diventano ventitré (il numero che più spesso oggi viene ricordato), ma i dieci di Parigi sono probabilmente quelli che Hilbert ritiene più importanti.

Il primo problema della lista di Hilbert è il problema del continuo. Che cosa vuol dire? Una domanda semplice: quanti punti ci sono su una retta? Infiniti. Sì, ma che tipo di infinito? Ora, il problema dell'infinito è antico, lo sappiamo tutti: già i filosofi greci si interrogavano sulla questione e Aristotele ci dice che non esiste l'infinito attuale ma solo l'infinito potenziale. I matematici trattano l'infinito con una certa cautela, con un pò di diffidenza, nessuno si azzarda a fare una teoria dell'infinito, così come si ha, invece, una teoria delle quantità finite. Ma l'Ottocento, secolo - ripeto - estremamente ricco di matematica, attacca anche questo problema: prima con **Bernhard Bolzano**, un matematico boemo, che vive piuttosto defilato e le cui opere non hanno una grande circolazione, poi con **Cantor**, il quale riesce a congegnare una classificazione dei diversi tipi di infinito e una vera e propria aritmetica dell'infinito. Gli infiniti non sono tutti uguali, scopre Cantor. I numeri naturali (1, 2, 3, 4 ...) sono tanti quanti i numeri frazionari, cioè i numeri razionali, come dicono i matematici; questo può apparire controintuitivo, perché le frazioni sembrano molte di più, ma in realtà possiamo far corrispondere a ciascun numero frazionario un numero naturale, cioè, in altre parole, è possibile contare i numeri frazionari. Cantor capisce (e dimostra) che invece i numeri della retta non si possono contare, cioè non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali: sono di più, un infinito più vasto, più ricco. E i punti che costituiscono un quadrato, per esempio? Uno del risultati straordinari di Cantor fu dimostrare che i punti che costituiscono un quadrato sono tanti quanti i punti che formano un segmento. La reazione di sorpresa è dello stesso Cantor: «*lo vedo, ma non ci credo*», scrisse in una lettera a Richard Dedekind. Esistono dunque diversi tipi di infinito, con i quali si possono anche fare delle operazioni aritmetiche - questa, appunto, è l'opera di Cantor -, ma occorre capire quale sia la gerarchia (a sua volta infinita) di questi infiniti. Ebbene, quando ci si domanda «*quanti sono i punti su una retta*?», cioè, in maniera più precisa, quando si pone il problema del continuo, ci si interroga sulla posizione che l'infinito dei punti di un segmento occupa nella gerarchia degli infiniti tipi di infinito.

Il secondo problema della lista di Hilbert riguarda una questione in apparenza più sfuggente, non sembra quasi un problema della matematica, ma un problema di ordine filosofico: si tratta di chiarire la compatibilità fra gli assiomi dell' aritmetica. Per aritmetica si intende ciò che tutti abbiamo studiato a scuola: il sistema dei numeri naturali con l'operazione di addizione (o somma). Può sembrare strano che ci si occupi di formalizzare, di rendere preciso, un campo così semplice, ma le scoperte matematiche stravaganti che sono state fatte nel corso dell'Ottocento, le bizzarrie nelle quali gli studiosi si sono imbattuti, gli esempi contrari all'intuìzione sono talmente numerosi che si impone una grande cautela: la geometria va fondata su basi solide l'aritmetica anche. E che cosa c'è di più solido che dare un'assiomatizzazione, cioè stabilire un insieme di definizioni e un insieme di regole elementari? Si pone però un problema: se do delle regole, devo assicurarmi che queste regole funzionino a dovere, cioè che non siano ridondanti e non producano contraddizioni. Chi mi dice che, una volta assiomatizzata l'aritmetica, poi non succeda di poter dimostrare due proposizioni che siano in contraddizione l'una con l'altra? Oppure, peggio, chi mi dice che in questo modo si riesca ad arrivare a tutte le verità, a dimostrare tutti i teoremi dell' aritmetica? Forse l'insieme delle definizioni che ho dato non è abbastanza ricco, forse le regole che ho scelto non sono quelle giuste. Hilbert si rende conto che è necessario trovare degli strumenti matematici per studiare le teorie matematiche, e in particolare l'aritmetica. I primi due problemi di Hilbert, l'ipotesi del continuo e la compatibilità degli assiomi dell' aritmetica, si pongono come una sfida che accompagna l'ingresso della matematica nel nuovo secolo.

L'ipotesi del continuo troverà soluzione all'interno della teoria degli insiemi, che sarà formalizzata - cioè assiomatizzata - negli anni Venti, proprio come Hilbert indicava alla fine dell'Ottocento. E qual è la risposta? La risposta è che non si può dire: tecnicamente l'ipotesi del continuo è «indecidibile». Questo significa che posso costruire una teoria assiomatica degli insiemi (ne esistono sul mercato almeno due versioni) e posso dimostrare che l'ipotesi del continuo non è in contraddizione con le assunzioni di base, cioè con i postulati, gli assiomi di questa teoria degli insiemi. Questo è il risultato a cui arriva **Kurt Gödel**, il grande logico austriaco, nel 1940. Ma nel 1963 un matematico americano, **Paul Cohen**, dimostra che anche la negazione dell'ipotesi del continuo non è incompatibile con gli assiomi: sta a noi, possiamo decidere se includerla nelle nostre verità oppure no.

Il secondo problema di Hilbert, quello relativo alla compatibilità degli assiomi dell'aritmetica, verrà risolto ancora una volta da Gödel, nel 1931: il celebre teorema di incompletezza stabilisce che l'aritmetica, se è esente da contraddizioni, allora è necessariamente incompleta. Dobbiamo in un certo senso rassegnarci al fatto che anche in aritmetica esistono delle verità che rimarranno per sempre al di fuori della nostra portata.

6. La matematica e il mondo

La matematica raggiunge nell'Ottocento delle vette di astrazione che non aveva mai toccato nei secoli precedenti. Si potrebbe forse essere tentati di credere che i matematici dell'Ottocento fossero più giocherelloni di quelli che li avevano preceduti e che si perdessero a inseguire rompicapo soltanto per il gusto di risolverli. In realtà non è così. La matematica ha una sua coerenza interna, come abbiamo detto più volte, e si sviluppa con un duplice moto, da una parte centripeto e dall'altra centrifugo: ci sono forze che tendono ad allontanare le discipline le une dalle altre e forze o, per meglio dire, matematici (pensiamo a Poincaré o anche allo stesso Hilberr) che cercano di riavvicinare settori distanti. Ma che cosa dobbiamo dire dell'astrazione? È necessaria quest'astrazione? Il Novecento, secondo me, ha mostrato che l'astrazione è necessaria per comprendere il mondo intorno a noi. Il mondo non è semplice (e con «mondo» intendo l'universo fisico, l'universo dei fenomeni) e gli strumenti della matematica sono gli strumenti adeguati per non perderei, per non smarrirei nell'oceano di esperienze nel quale siamo immersi. Le grandi teorie fisiche del Novecento - la relatività, soprattutto la relatività generale, e la meccanica quantistica, in particolare la teoria quantistica dei campi hanno avuto bisogno, non solo per svilupparsi, ma anche per nascere, per essere formulate, di strumenti matematici molto sofisticati. Quei concetti geometrici che abbiamo visto emergere in Gauss e poi svilupparsi in Poincaré, perfino quei concetti topologici che sembrano così lontani dalla realtà delle cose, ecco che si ritrovano puntualmente nelle teorie fisiche che descrivono ciò che accade intorno a noi: abbiamo bisogno della geometria per descrivere l'universo su larga scala, abbiamo bisogno della geometria per descrivere i fenomeni su piccola scala, nelle cosiddette teorie di campo, abbiamo bisogno dell'analisi per studiare il comportamento delle soluzioni delle equazioni di Einstein, abbiamo bisogno dell'analisi per studiare la meccanica quantistica. Quindi a posteriori possiamo dire che è il mondo stesso, è l'universo a essere astratto; forse la matematica non lo è abbastanza.

7. Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nacque a Braunschweig il 30 aprile 1777, figlio unico di genitori di umile estrazione sociale; la sua intelligenza vivace lo mise in luce e poré studiare grazie al duca di Braunschweig, che gli assegnò uno stipendio annuo di dieci talleri, permettendogli di frequentare il *Collegium Carolinum*.

La sua vita può essere idealmente suddivisa in cinque periodi, ognuno caratterizzato da un interesse prevalente: algebra e aritmetica (1794-1801), astronomia (1801-16), geometria (1816-28), fisica-matematica (1828-41) e di nuovo geometria (1841-55). Già nel 1799 interpretò geometricamente il teorema fondamentale dell'algebra di Jean-Baptiste d'Alembert, dandone una dimostrazione rigorosa nella tesi di dottorato; nel trattato *Disquisitiones arithmeticae* (1801), sviluppando le idee abbozzate da Eulero, Pierre Fermat e Joseph Louis de Lagrange, espose in modo completo e organico la teoria dei numeri, fondamento di quella moderna, facendosi conoscere dal mondo scientifico dell'epoca. Professore di astronomia e direttore dell'osservatorio di Gottinga, fece importanti osservazioni, determinò l'orbita del pianeta Cerere (già scoperto da Giuseppe Piazzi) e fornì una completa teoria del moto del sistema solare.

Nel trattato *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium* (1809) studiò la legge esponenziale della distribuzione degli errori, esprimendola mediante la funzione probabilistica rappresentata dalla classica forma a campana chiamata in seguito gaussiana. Sono del terzo periodo i suoi studi sulle coordinate e le curvature geodetiche, i teoremi sulla curvatura totale di una superficie (o curvatura di Gauss) secondo cui il prodotto delle curvature principali di una superficie flessibile ma inestensibile è costante anche per deformazioni della superficie (*Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827). Analizzò una geometria che prescindesse dal quinto postulato di Euclide, e che egli stesso chiamò «non-euclidea», vent'anni prima delle opere di Nicolaj Ivanoviè Lobačevskij. Tuttavia, seguendo il motto cui era sempre stato fedele (*pauca sed matura*), non ritenne di procedere oltre in quegli studi. Per le scienze sperimentali sviluppò la teoria degli errori e della probabilità; studiando la convergenza della serie ipergeometrica ricondusse al rigore classico dimostrazioni e definizioni di concetti legati all'infinito, considerando scorretti i ragionamenti suffragati dalla sola intuizione e in uso a quei tempi. In fisica espose una teoria generale del magnetismo terrestre, osservò che il polo magnetico terrestre e quello geografico non coincidono (1838), propose un sistema di misura assoluto, dedotto dalla dinamica, noto come sistema elettromagnetico di Gauss e pose i fondamenti dell'elettrostatica. Negli ultimi anni ritornò alla geometria e all'analisi matematica, rappresentando nel piano i numeri complessi, «impossibili» a quel tempo e poco noti, e conferendo loro la prima sistemazione organica.

Sono poche le opere lasciate da Gauss in rapporto alla vastità del suo lavoro, che fu spesso desunto e rielaborato in base ad appunti rinvenuti dopo la sua morte. Il suo nome accompagna numerosi postulati, leggi e teoremi. Morì a Gottinga i1 23 febbraio 1855.

8. Bernhard Georg Friedrich Riemann

Bernhard Georg Friedrich Riemann nacque il 17 settembre 1826 nel piccolo villaggio di Breselenz, in Bassa Sassonia, una regione contadina e povera, secondogenito di sei fratelli, figlio di un pastore luterano; timido, introverso, per tutta la sua breve vita fu cagionevole di salute. Le condizioni economiche della famiglia e il relativo isolamento non gli consentirono studi regolari: fino all'età di quattordici anni studiò da autodidatta e nel 1840 entrò al liceo di Hannover. Nel 1842 si trasferì a Lüneburg dove mostrò uno spiccato interesse per la matematica. Nel 1846 fu avviato dal padre agli studi teologici all'università di Gottinga, che abbandonò per seguire i corsi di matematica di Moritz Stern e Carl Friedrich Gauss. Nella primavera del 1847 si trasferì all'università di Berlino dove fu allievo di Jacob Steiner, Cari Gustav Jacobi e Peter Gustav Dirichlet. A Gottinga (1849-51) divenne assistente di fisica di Wilhelm Eduard Weber, nel 1857 fu nominato professore straordinario e nel 1859 succedette nella cattedra a Dirichlet (che a sua volta nel 1855 era subentrato a Gauss).

Riemann proseguì l'opera dei suoi insegnanti occupandosi di teoria dei numeri, di algebra superiore e di geometria. L'ecletticità dei suoi studi, che si estesero alla filosofia e alla fisica, l'ampia visione d'insieme che lo contraddistinse e la capacità di sintesi fra i più svariati campi delle scienze fanno di Riemann uno dei più grandi e originali matematici dell'Ottocento: i suoi lavori segnano il punto di arrivo della matematica classica e quello di partenza dei suoi sviluppi moderni. Operò una sistemazione critica del calcolo infinitesimale definendo formalmente il concetto di integrale; approfondì la teoria delle funzioni a variabile complessa (nella tesi di laurea, 1851, in cui introdusse la superficie di Riemann). In teoria dei numeri introdusse (1859) la funzione zeta di Riemann per calcolare il numero dei numeri primi inferiori a un dato valore. In tre successive memorie studiò le funzioni abeliane (1857), la rappresentabilità delle funzioni mediante serie trigonometriche (1854) e il concetto di metrica di uno spazio finito e illimitato; in questo studio sulle varietà a n dimensioni, Riemann formalizzò, accanto a quelle di Jànos Bolyai e Nikolaj Ivanoviè Lobačevskij, una geometria non euclidea (ellittica o riemanniana) in cui valgono tutti i postulati di Euclide tranne il quinto (*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, 1854); le considerazioni contenute in questa memoria costituirono un punto di partenza fondamentale per il modello geometrico del cronotopo nella teoria della relatività generale di Albert Einstein. Malato di tubercolosi, negli ultimi anni della sua vita, per l'aggravarsi delle condizioni di salute, soggiornò a varie riprese in Italia e si spense a Selasca (Verbania), sul lago Maggiore, i1 20 giugno 1866.

9. Jules-Henri Poincaré

Jules-Henri Poincaré nacque a Nancy il 29 aprile 1854 da una famiglia benestante: il cugino Raymond Poincaré fu più volte ministro e presidente della repubblica dal 1913 al 1919. Di salute cagionevole, fu istruito dalla madre fino al suo ingresso nel liceolocale, dove eccelse in tutte la materie; nel 1873 entrò all'*Ecole Polytechnique*, e quindi proseguì i suoi studi di ingegneria all'*Ecole Nationale Supérieure des Mines* (1876-79), dove ebbe come insegnante Charles Hermite, e ottenne il dottorato in scienze matematiche con una tesi sulle equazioni differenziali.

Ricevette subito l'incarico del corso d'analisi alla facoltà di scienze di Caen, cui seguì la cattedra di professore associato di analisi alla facoltà di scienze di Parigi. Nel 1886 ottenne la cattedra di fisica matematica e teoria della probabilità all'*École Polytechnique* e alla Sorbona, dove rimase fino alla morte. A trentatré anni fu nominato membro dell'*Accademia delle Scienze* (di cui divenne presidente nel 1906), e nel 1909 divenne membro dell'*Académie Française*. Lasciò in oltre trenta volumi e cinquecento memorie la testimonianza della sua opera feconda in matematica, geometria e nella loro applicazione in tutte le branche della fisica. Contribuì allo sviluppo della teoria delle equazioni differenziali introducendo, a partire dal lavoro di Lazarus Immanuel Fuchs, le funzioni fuchsiane; tra i fondatori della topologia combinatoria, definì rigorosamente il concetto di omotipia e dimensione; studiò le geometrie non euclidee come sistemi coerenti di convenzioni, adattabili a sistemi fisici diversi. Applicò tali studi all'elettromagnetismo, stabilendo l'invarianza delle equazioni di Maxwell in relazione al gruppo di trasformazioni di Lorentz e fornì una spiegazione dell' oscillatore di Hertz. Partendo dalla teoria della probabilità, sostenne l'ipotesi quantistica di Max Planck come rivoluzione scientifica di portata pari a quella newtoniana. In astronomia risolse il problema dei tre corpi (1889) facendo uso per la prima volta del calcolo delle variazioni, applicò alla meccanica celeste il concetto di equilibrio delle masse fluide in rotazione ed enunciò una teoria sull'origine dei pianeti. Dal punto di vista epistemologico, criticò l'approccio formalista di David Hilbert e quelli logicisti di Bertrand Russell e Giuseppe Peano, precorrendo le idee di Egbertus Brouwer. La sua concezione, talvolta indicata come «convenzionalisrno», nega il carattere sperimentale in matematica e quello aprioristico del concetto di spazio-tempo in geometria, sostenendo l'autonomia di tali strumenti dall'empirismo fisico e rifiutando la possibilità delle teorie di fornire un'adeguata rappresentazione della realtà (*Scienza e ipotesi*, 1902; *Scienza e metodo*, 1909). Morì a Parigi, in seguito a un intervento chirurgico, il 17 luglio 1912.

10. David Hilbert

David Hilbert nacque a Konigsberg i1 23 gennaio 1862 da una famiglia benestante. Nel 1872 si iscrisse, nella città natale, al *Collegium Fridericianum* che abbandonò per il *Wilhelm Gymnasium* dove si diplomò nel 1880. Quindi frequentò l'università di Konigsberg dove ebbe come professore Adolf Hurwitz e come compagno di corso Hermann Minkowski, con cui strinse una duratura amicizia. Si laureò nel 1885 con Ferdinand von Lindemann con la tesi *Sulle proprietà invarianti di speciali forme binarie, in particolare le funzioni circolari*. Rimase nella stessa università come docente dal 1886 al 1895, anno in cui ottenne la cattedra di matematica all'università di Gottinga, dove restò per tutta la sua lunghissima carnera accademica. Studiò la teoria dei numeri, la teoria degli invarianti algebrici e soprattutto si occupò dei fondamenti logici dell'algebra e della geometria. Nei *Fondamenti della geometria* (1899) introdusse il criterio di non contraddittorietà per considerare la compatibilità, la completezza e l'indipendenza degli assiomi euclidei a partire dal concetto primitivo di proposizione. In seguito allargò tale concetto proponendo una riconciliazione formale di tutte le teorie matematiche e geometriche. L'idea alla base di tale programma era che l'assenza di un significato intrinseco negli assiomi delle teorie matematiche formali implicava l'uso del criterio di non contraddittorietà per determinare la loro accettabilità. Gli assiomi divenivano così implicite definizioni di proprietà geometriche, non già proposizioni solamente intuitive. Questa impostazione, nota come formalismo hilbertiano e risultata errata in seguito alle obiezioni di Kurt Gödel, costituì comunque il punto di partenza di buona parte degli studi contemporanei in logica-matematica. In *Lineamenti fondamentali di logica teorica* (1928) Hilbert espose le basi matematiche della fisica teorica e propose una sistemazione della logica simbolica in grado di presentare in modo articolato e preciso i fondamenti della matematica. A lui si deve un'importante formalizzazione delle strutture infinite in matematica, in cui definì gli spazi vettoriali a infinite dimensioni (spazi di Hilbert), fondamentali in fisica-matematica (*Fondamenti della matematica*, 1934-39) e, con Johann von Neumann, la formulazione matematica della meccanica quantistica. Ormai celebrato professore emerito, vide la sua facoltà svuotarsi in seguito all'espulsione o all'esilio dei colleghi ebrei e oppositori del nazismo; morì a Gottinga il 14 febbraio 1943.