Filosofia e matematica

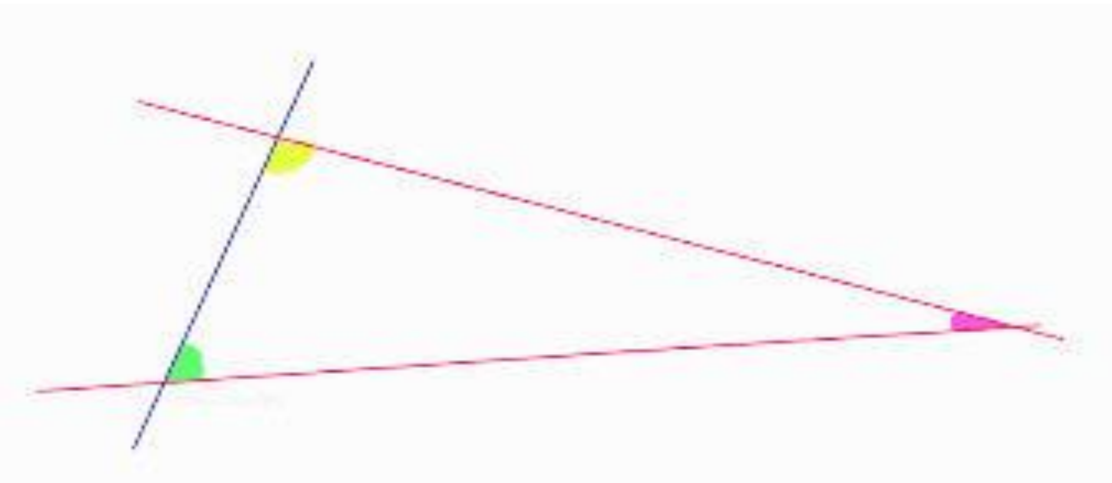
1. Le geometrie non euclidee

Nel XIX secolo si assiste alla riorganizzazione delle molteplici branche in cui si articola la matematica. Questo processo è frutto, innanzitutto, della nuova concezione dell'**assiomatica** (sistemazione delle teorie matematiche in base alla quale i teoremi vengono dedotti da un nucleo di assiomi) che emerge con la nascita di sistemi geometrici alternativi a quello euclideo, avvenuta nella prima metà del secolo. In secondo luogo, tale riordinamento dipende anche dal tentativo di rigorizzazione dei concetti fondamentali dell'**analisi infinitesimale** (disciplina creata, alla fine del Seicento, da **Gottfried Wilhelm Leibniz**, 1646-1716, e da **Isaac Newton**, 1642-1727) che si risolve in una vera e propria indagine sui fondamenti della matematica.


1. Euclide

Per comprendere che cosa siano le geometrie non euclidee, bisogna ricordare i caratteri essenziali degli *Elementi* di **Euclide** (III secolo a.C.). In tale opera la geometria (parte della matematica che si occupa delle figure, ovvero delle relazioni tra punti, rette, piani e spazi) è presentata secondo il modello assiomatico, che consiste nel fissare innanzitutto un **numero limitato di definizioni degli enti geometrici fondamentali** (come punto, linea, superficie, angolo, cerchio, ecc.; ad esempio "*il punto è ciò che non ha parti*", "*la linea è una lunghezza senza larghezza*" e così via), cui seguono **cinque postulati o assiomi**, che esprimono proprietà e relazioni degli enti geometrici fondamentali, come "*fra due punti qualsiasi si può tracciare una linea retta*", "*ogni retta finita può essere prolungata indefinitivamente*" ecc. Infine vengono assunte **cinque nozioni comuni**, enunciati di carattere generale e universalmente evidenti: "*due cose uguali a una terza sono uguali fra loro*", "*il tutto è maggiore delle parti*" ecc. Tali nozioni sono dette "comuni" perché a differenza dei postulati che sono princìpi propri della geometria, appartengono anche ad altre scienze. Da questi elementi fondamentali vengono poi ricavate tutte le altre proposizioni geometriche vere, ossia i **teoremi della geometria**, attraverso vari metodi dimostrativi, quali, ad esempio, il metodo **"per assurdo"** (che consiste nell'assumere come vera l'ipotesi contraria a quella che si vuole dimostrare per rivelarne la contraddittorietà) e quello **"per esaustione"** (che si realizza per progressiva approssimazione).

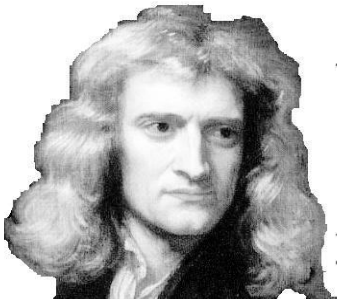
La nascita delle geometrie non euclidee è legata alla secolare discussione intorno alla validità del quinto postulato di Euclide, così formulabile: "*se una retta, incontrandone altre due, forma da una stessa parte gli angoli interni la cui somma è minore di due retti, allora le due rette, se prolungate indefinitivamente, si incontrano da quella parte*".



Il quinto postulato è detto comunemente “**il postulato della parallela**”, perché equivale all’affermazione che, dati in un piano una retta e un punto fuori di essa, per il punto può passare una e una sola parallela alla retta data. Com’è noto, il termine “postulato” indica una proposizione che viene assunta come vera, senza essere dimostrata, in quanto condizione necessaria perché sia possibile ricavare da essa altre proposizioni, che ne discendono logicamente. Laddove, però, i primi quattro postulati di Euclide appaiono immediatamente evidenti, il quinto non è accompagnato da evidenza intuitiva; presenta, infatti, una complessità di formulazione che lo avvicina più ai teoremi che ai postulati. Per oltre duemila anni, i matematici hanno tentato di dimostrarlo, così da ridurlo a teorema, poiché la necessità di assumerlo come postulato sembrava una sorta di “neo” della costruzione euclidea. Ciononostante, la critica mossa al quinto postulato non metteva in discussione il suo carattere di proposizione vera, ma soltanto quello di proposizione evidente, e quindi verteva sulla necessità di assumerlo tra i fondamenti, cioè tra le proposizioni indimostrabili del sistema.

Nel 1733 il gesuita **Giovanni Girolamo Saccheri** (1667-1733), nel suo libro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclide emendato da ogni neo), aveva cercato di **dimostrare per assurdo** detto postulato: ammessa, cioè, l’ipotesi opposta al quinto postulato come punto di partenza della dimostrazione, il matematico italiano puntava a ricavarne delle conseguenze contraddittorie. Saccheri, che aveva commesso qualche errore, incontrò la contraddizione cercata e pensò così di aver raggiunto lo scopo che si era prefisso. In realtà, aveva costruito un sistema geometrico coerente e alternativo a quello euclideo. In questo modo, il tentativo di Saccheri fece emergere involontariamente l’ipotesi che sistemi geometrici comprendenti la negazione del quinto postulato di Euclide potessero risultare non contraddittori.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu


2. Giovanni Girolamo Saccheri

Tuttavia la costruzione consapevole delle geometrie non euclidee avvenne più di un secolo dopo, nella prima metà dell’Ottocento, con i sistemi di **Nicolaj Ivanovic Lobacevskij** (1793-1856), **Janos Bolyai** (1802-1860), **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) e **Georg Friedrich Riemann** (1826-1866).


Nicolaj Ivanovic Lobacevskij (1793 – 1856)

Non c’è ramo della matematica, per quanto astratto, che non possa essere applicato un giorno a fenomeni del mondo reale.


Janos Bolyai (1802-1860)

Dal nulla ho creato un altro, nuovo universo


Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

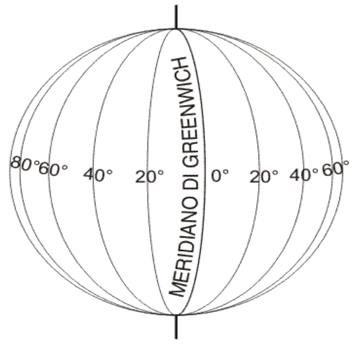
Gauss aveva scritto a Farkas Bolyai a proposito del suo lavoro sul V postulato di Euclide: *"Lodare questo lavoro sarebbe come lodare me stesso. Infatti esso coincide quasi esattamente con le meditazioni che ho fatto trenta, trentacinque anni fa".*


Georg Friedrich Riemann (1826-1866)

La geometria di Lobacevskij e Bolyai (detta “**geometria iperbolica**”) esige che per un punto esterno a una retta passino infinite parallele alla retta data, mentre quella di Riemann (detta “**geometria ellittica**”) che non ne passi nessuna. Le teorie che vennero ricavate da questi presupposti(controintuitivi perché lontani dalle nostre rappresentazioni della realtà che ci circonda) non evidenziavano alcuna contraddizione.

La maggior parte dei teoremi della geometria euclidea (chiamata ora anche “**parabolica**”) dipendono almeno parzialmente dal quinto postulato: di conseguenza, tanto la geometria iperbolica quanto la geometria ellittica se ne differenziano notevolmente. Ad esempio, mentre nella geometria euclidea la **somma degli angoli interni di un triangolo** è **uguale** a due retti, nella geometria iperbolica questa somma è **minore** di due retti e nella geometria ellittica **maggiore**.

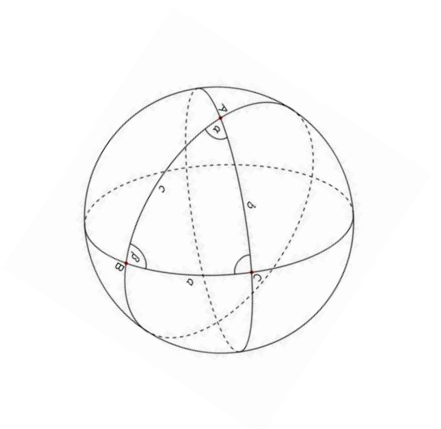
> *Qual è ‘geometra che tutto s’affigge*
> *Per misurar lo cerchio, e non ritrova,*
> *pensando, quel principio ond’elli indige,*
> *tal era io a quella vista nova:*
> *veder volea come si convenne*
> *l’imago al cerchio e come vi s’indova…*
> *A l’alta fantasia qui mancò possa.*
>
> Dante, *Paradiso XXXIII*, 133-138, 142



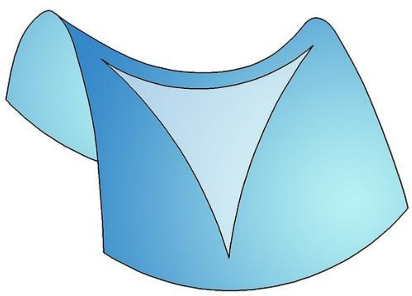
Per avere un’idea intuitiva della **geometria ellittica** si può pensare alla geometria proiettata sulla superficie di una **sfera**: la superficie sferica corrisponde al piano della geometria euclidea, e le circonferenze massime, ottenute tagliando la sfera stessa, rappresentano le rette euclidee.

In un modello come questo, dunque, non esistono due rette (cioè due circonferenze massime) che non s’incontrino.

Ad esempio, sulla superficie sferica della Terra tutti i **meridiani**, che ne costituiscono le circonferenze massime, s’incontrano al polo Nord e al polo Sud.



Sulla superficie sferica, inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo è superiore a 180°. Infatti, considerando il triangolo BAC della figura qui sopra, in cui due vertici sono presi all’equatore e uno si trova al polo, si vede che la somma degli angoli in B e C, essendo retti, è di 180°; e così, aggiungendo l’angolo A, la somma degli angoli interni del triangolo BAC risulta maggiore di 180°.



Per avere un’idea, invece, della **geometria iperbolica**, si può pensare alla geometria su una **superficie a sella**, in cui la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180°.

2. Conseguenze filosofiche delle geometrie non euclidee

Notevoli sono le conseguenze delle geometrie non euclidee sul piano filosofico.

Innanzitutto, la **presenza di sistemi geometrici non contraddittori alternativi a quello euclideo** dimostra che gli assiomi della geometria di Euclide non devono essere considerati verità assolutamente valide, come aveva sempre ritenuto il pensiero filosofico occidentale. La geometria euclidea non è **la geometria**, ossia non è l'unica scienza possibile dello spazio, in quanto si possono costruire geometrie altrettanto valide basate su postulati diversi, e con esiti differenti. Gli assiomi della geometria sono dunque delle semplici ipotesi a cui se ne possono contrapporre altre. La geometria diventa una serie di **sistemi ipotetico - deduttivi**, all'interno dei quali esiste un legame di necessità (cioè di dimostrabilità) che unisce teoremi e postulati, ma non c'è nessuna necessità logica nello scegliere un sistema di postulati piuttosto che un altro.

In secondo luogo, le geometrie non euclidee mettono in **crisi il criterio dell'evidenza intuitiva** come garanzia della validità degli enunciati di partenza di una teoria. Le nuove teorie geometriche, seppur controintuitive, risultano perfettamente non contraddittorie. Dunque, non è detto che i princìpi di una teoria debbano essere, come affermava **Cartesio** (1596-1650) nel *Discorso sul metodo* (1637), intuitivamente evidenti. Possono essere anche "insoliti". Quello che conta è solo la loro **non contraddittorietà o coerenza**.

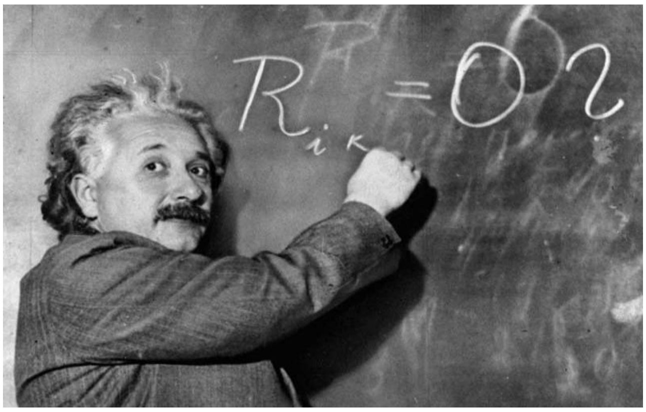
Infine, nasce una distinzione tra **geometria matematica** e **geometria fisica**: la prima ha un carattere formale e non fa riferimento alla realtà, perché dimostra i suoi teoremi a partire da assiomi convenuti, il cui rapporto con gli oggetti del mondo fisico non ha rilevanza; la seconda, invece, è un ramo della fisica e cerca di descrivere l'effettiva realtà spaziale. Si impone così il problema di stabilire quale, fra i vari sistemi possibili, possa essere la geometria dello spazio fisico, ovvero quale sia la geometria **vera**. Con la scoperta di più sistemi geometrici alternativi, sembra cadere la tesi kantiana secondo cui sarebbe possibile stabilire a priori (cioè indipendentemente dall'esperienza) la geometria della realtà. **Gauss** (come Lobačevskij e Riemann) sostiene che la ragione da sola non può risolvere il problema di quale sia la vera geometria. La soluzione, a suo giudizio, dipende dall'**esperienza**: bisogna appellarsi all'osservazione empirica per sapere quale geometria rappresenta le relazioni spaziali fra i corpi fisici. **Il problema può essere deciso solo a posteriori** (per esempio, attraverso una serie di misure). **La geometria è una scienza empirica.** E secondo **Gauss** l'esperienza attesta che la geometria dello spazio fisico è quella euclidea.

Diversa è invece la spiegazione proposta da **Henri Poincaré** (1854 – 1912). Il grande matematico francese rifiuta la teoria kantiana secondo cui gli assiomi geometrici sarebbero giudizi sintetici a priori, perché in tal caso si imporrebbero in modo necessario alla nostra mente cosicché non potremmo ipotizzare proposizioni geometriche diverse. Ma Poincaré non accetta nemmeno la tesi empirista (propria di Gauss, Lobačevskij e Riemann) che considera gli assiomi della geometria delle verità a posteriori di natura empirica, cioè dettate dall'esperienza. Infatti, gli enti di cui parla la geometria sono oggetti ideali e non oggetti materiali constatabili nella realtà sensibile. Se la geometria fosse ricavata dall'esperienza non sarebbe una **scienza esatta** (come invece è), ma una **scienza sperimentale** soggetta a continue revisioni e in qualche modo già confutata dall'esperienza, dal momento che nell'esperienza non esistono solidi rigorosamente invariabili.

3. Henri Poincaré

La conclusione che Poincaré trae da queste considerazioni è che gli assiomi della geometria sono **convenzioni**. La **scelta** di una geometria piuttosto che di un'altra per descrivere la realtà non è obbligata, ma **libera**. L'esperienza non ci può imporre di scegliere una determinata geometria logicamente possibile. <u>Ogni fenomeno può essere descritto, con uguale esattezza, sia adoperando la geometria euclidea, sia adoperando quelle non euclidee</u>. Una geometria, dunque, secondo Poincaré, non può essere più veritiera dell'altra e chiedersi quale sia quella vera non ha nessun senso: sarebbe come domandarsi se il sistema metrico decimale è vero mentre le antiche misure sono false.

Sebbene la **scelta** di una geometria sia libera, tuttavia **non** è **arbitraria**, non avviene cioè del tutto senza ragione. Infatti <u>una geometria può essere più conveniente di un'altra nel descrivere la realtà</u>: può offrire una descrizione più elementare e maneggevole rispetto a quella offerta dalle concorrenti. Per l'epistemologo francese, la scelta è dettata da un **criterio di comodità**, ossia di semplicità pratica. **Poincaré** pensa che la geometria euclidea sia destinata a rimanere la **più “comoda”** da applicare alla realtà che ci circonda.



4. Albert Einstein

Ad altra conclusione giunge **Albert Einstein** (179 – 1955), secondo il quale, se nelle **dimensioni terrestri**, cioè nelle piccole aree, la **geometria** fisica più opportuna resta quella **euclidea**, nelle **dimensioni astronomiche**, in base alla teoria della relatività generale, la **geometria** naturale dello spazio fisico è quella **di Riemann**, che appare il modello più adeguato per descrivere l’universo.

3. Aritmetizzazione della matematica e teoria degli insiemi

5. Georg Cantor
«*Nessuno potrà cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi*». (David Hilbert)

Mentre lo sviluppo della geometria ottocentesca è segnato dalla creazione dei sistemi non euclidei, nell’ambito dell’analisi infinitesimale, durante il corso del XIX secolo, matura la cosiddetta “**indagine sui fondamenti**”, volta a determinare le basi epistemologiche e logiche di questa disciplina. Tale indagine è stimolata dall’esigenza di rigore[1] che caratterizza tutta la matematica ottocentesca, tesa a chiarire concetti come “limite”, “derivata” e “integrale”, che risultano ancora avvolti in oscurità e incertezze.

Nel lavoro di rigorizzazione si raggiunge un notevole successo con la conclusione della “**aritmetizzazione della matematica**”, cioè con la riduzione di tutte le nozioni di numero (complesso, reale e razionale) ai numeri naturali, ossia ai numeri interi positivi 0, 1, 2, 3… di cui si occupa l’aritmetica. L’impresa è portata a termine nel 1872 da **Georg Cantor** (1845 – 1918) e da **Richard Dedekind** (1831 – 1916). In particolare, Cantor definisce i **numeri reali** (quali $\sqrt{2}$, π ecc.) come limiti di successioni convergenti di **numeri razionali**. A loro volta i numeri razionali, cioè le frazioni, si possono ricondurre facilmente ai **numeri interi**, e questi ultimi ai **numeri naturali**. L’aritmetica diventa così la base dell’intera matematica.

A Cantor si deve anche la creazione di una nuova teoria matematica, la “**teoria degli insiemi**” (cioè la teoria degli aggregati di oggetti di qualunque natura), proposta per estendere la matematica tradizionale al nuovo dominio rappresentato dall’**infinito in senso attuale**.

L’**«infinito attuale»** va inteso come una totalità fissa e costante che supera in estensione ogni grandezza finita, al quale, da **Aristotele** (384-322 a.C.) in poi, si contrappone l’«**infinito potenziale**», un’infinità in fieri, non attualizzata, simile a un processo che non ha mai fine, e che permette di ampliare indefinitamente un nucleo finito e arbitrario di enti. Per Aristotele, sono esempi di infinito potenziale l’**addizione di una serie di numeri** (dato che a ogni numero se ne può sempre aggiungere un altro, indefinitamente) e la **divisione dello spazio** (poiché il risultato di una divisione spaziale mantiene pur sempre una certa grandezza, e quindi risulta sempre ulteriormente

[1] L'analisi è scaturita dalle riflessioni di matematici della metà del 600, quali Cavalieri e Pascal, ed è stata elaborata sistematicamente nelle due forme equivalenti del «calcolo infinitesimale» da Leibniz e del «calcolo delle flussioni» da Newton. Rivelatasi essenziale per esprimere le leggi della nuova fisica emersa dalla rivoluzione scientifica, l'analisi si trova ad avere, ancora nell'800, un assetto concettuale piuttosto criticabile, per via dell'ambiguo ruolo giocato da nozioni, quale quella di infinitesimo, mai sufficientemente chiarite e anzi sospettate di essere internamente contraddittorie. Nell'800, finalmente, per opera di alcuni matematici, tra i quali spicca il nome del tedesco Karl Weierstrass (1815-1897), l'analisi viene riformulata in termini di concetti non controversi.

divisibile).

Secondo il grande filosofo greco, l'infinito attuale non può esistere, nemmeno nel pensiero: esiste soltanto quello potenziale.

Cantor, invece, ammette l'esistenza di insiemi infiniti in atto (di punti o di numeri). A suo giudizio, **un insieme infinito in senso attuale è un aggregato in cui le parti equivalgono – paradossalmente – al tutto**. La serie dei numeri naturali è un insieme infinito in questo senso perché contiene tanti elementi quanti ne contiene un suo sottoinsieme, come, per esempio, la serie dei numeri pari. Supponiamo, infatti, di disporre su due righe sovrapposte la serie dei numeri naturali e quella dei numeri pari:

$$1, 2, 3, 4, \dots\ n \dots$$
$$2, 4, 6, 8, \dots\ 2n \dots$$

A ogni cifra della riga inferiore corrisponde una cifra della riga superiore, e viceversa. Quindi il numero (infinito) degli elementi delle due serie è lo stesso, sebbene la seconda serie sia evidentemente una parte della prima. Molti matematici del passato, che avevano notato questa particolarità, pensavano che ciò rivelasse una contraddizione legata al concetto di infinito attuale, e finivano pertanto con l'accettare la tesi aristotelica secondo cui tale infinito non esiste. Cantor, al contrario, nega che nell'esempio suddetto ci sia una contraddizione, affermando che c'è soltanto una bizzarria.

Cantor contesta anche l'idea intuitiva secondo cui l'infinito sarebbe qualcosa di "unico". Egli dimostra infatti l'esistenza di insiemi infiniti attuali di grandezza diversa (già l'insieme infinito dei numeri reali risulta **più grande** rispetto all'insieme infinito dei numeri naturali) e propone un'inedita teoria matematica dei numeri che spettano a questi insiemi, detti appunto numeri "**transfiniti**" perché si situano "al di là" dei numeri finiti.

Cantor, durante la seconda metà della sua vita, soffrì di attacchi di depressione, che compromisero seriamente la sua abilità di matematico e lo costrinsero a ripetuti ricoveri. La scoperta del **paradosso di Russell** lo portò a una crisi nervosa da cui non si seppe più riprendere.

Cominciò allora a leggere testi di letteratura e di religione, in cui sviluppò il suo concetto d'infinito assoluto che identificò con Dio. Egli scrisse:

« *L'infinito attuale si presenta in tre contesti: in primo luogo quando si realizza nella forma più completa, in un'essenza mistica completamente indipendente, in Deo, che io chiamo Infinito Assoluto o, semplicemente, Assoluto; in secondo luogo quando si realizza nel mondo contingente, creato; in terzo luogo quando la mente lo coglie in abstracto come una grandezza, un numero o un tipo di ordine matematico***».** Impoveritosi durante la prima guerra mondiale, morì ad Halle dove era ricoverato in un ospedale psichiatrico.

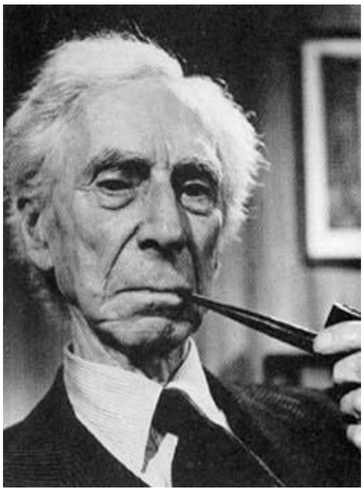
4. Il logicismo

Un altro grande logico e matematico che opera alla fine del XIX secolo è il tedesco **Gottlob Frege** (1848-1925). Frege si propone di andare oltre la stessa aritmetizzazione dell'analisi attuata dai matematici ottocenteschi, risolvendo l'aritmetica in qualcosa di ancor più originario. Con la "**logicizzazione della matematica**" (o "**logicismo**"), Frege intende definire il concetto aritmetico di numero naturale in termini puramente logici, così da ricondurre l'intero edificio della matematica alla logica. Per realizzare un simile disegno, elabora una nuova forma di logica (esposta nell'*Ideografia* del 1879) adatta a descrivere e coordinare in modo sistematico la realtà matematica.

6. **Gottlob Frege**

Se le **verità aritmetiche** sono riducibili a teoremi logici, tali verità risultano **analitiche a priori** come quelle della logica, contrariamente a ciò che pensava **Immanuel Kant** (1724-1804), secondo il quale le **proposizioni aritmetiche** sarebbero, invece, dei **giudizi sintetici a priori**. Inoltre, per **Frege** (che condivide una concezione filosofica di tipo **platonico**), gli enti logico-matematici quali i numeri esistono come oggetti ideali, indipendentemente da qualsiasi atto soggettivo del pensiero. In altre parole, tali enti non devono essere confusi con le rappresentazioni soggettive che ciascun uomo se ne forma, poiché essi esistono in sé, essendo scoperti e non inventati dagli uomini.

Frege, nei *Fondamenti dell'aritmetica* (1884) e nei due volumi dei *Principi dell'aritmetica* (1893 e 1903), riesce a definire la nozione di numero naturale in termini logici. In particolare, per tale definizione, egli si serve dei concetti logici di "**classe**", vale a dire insieme, e di "**equinumerosità**", una relazione che sussiste fra due classi quando è possibile stabilire fra di esse una corrispondenza biunivoca, cioè quando a ogni elemento dell'una si può far corrispondere uno e un solo elemento dell'altra e viceversa. In sostanza, il numero di una certa classe A si può definire come "*la classe di tutte le classi equinumerose ad A*". Per esempio, il numero di una coppia, cioè il 2, è la classe di tutte le coppie esistenti, il numero 3 è la classe di tutti i terzetti, il numero 4 è la classe di tutti i quartetti, e così via. Secondo Frege, un numero particolare non si identifica con alcun complesso di termini che hanno quel numero. Il numero 3 non si identifica con il terzetto costituito da Tizio, Caio e Sempronio, ma corrisponde alla classe di tutte le classi che sono in corrispondenza biunivoca con tale terzetto. Un numero determinato è, dunque, una **classe di classi**, una pluralità di pluralità.

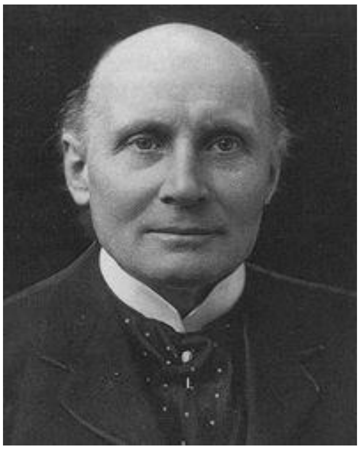

7. Bertrand Russell

L'impostazione fregeana subisce, tuttavia, una battuta d'arresto in seguito a una scoperta realizzata, nel 1902, dal giovane logico inglese **Bertand Russell** (1872 – 1970). Russell, analizzando l'opera di Frege, dimostra che dal suo sistema è possibile ricavare un'**antinomia**[2], cioè una contraddizione, legata al concetto di "classe". In particolare, l'antinomia nasce se ci si chiede se la classe R di tutte le classi che non contengono se stesse come elemento è o no membro di se stessa. Infatti, se si dice che R appartiene a se stessa, R rientra nelle classi che non sono membri di se stesse. Se invece si dice che R non appartiene a se stessa, allora risulta appartenere a se stessa. Comunque si risponda, si cade in contraddizione.

L'antinomia scoperta da Russell apre ufficialmente la cosiddetta "**crisi dei fondamenti della matematica**" e getta i filosofi della matematica in uno stato di disorientamento paragonabile a quello in cui si sono trovati i pitagorici dopo la scoperta dell'incommensurabilità del lato con la diagonale di un quadrato. Tant'è vero che Frege, annientato dalla scoperta di Russell, decide di abbandonare il suo programma fondazionale di stampo logicista: sembra, infatti, impossibile definire i numeri in termini di classi, dal momento che le classi stesse si rivelano foriere di contraddizioni[3].

Tuttavia, Russell è convinto della sostanziale sensatezza del logicismo, e non intende rassegnarsi di fronte a questa difficoltà. Decide, così, di riproporre la fondazione logica della matematica cercando di evitare ogni possibile incoerenza. In altre parole, si propone di riformulare una teoria logica delle classi che sia in grado di fondare la matematica, ma che non incorra nella contraddizione. Il tentativo di Russell è proposto nei *Principia Mathematica*, scritti in collaborazione con **Alfred N.Whitehead** (1861 – 1947) fra il 1910 e il 1913, e prende il nome di "**teoria dei tipi**".

Secondo tale teoria gli insiemi vanno classificati gerarchicamente, in modo che un insieme potesse essere membro di un altro solo se


8. Alfred N.Whitehead

[2] L'antinomia è una conclusione autocontraddittoria diversa da un paradosso che consiste, invece, in una conclusione logica e non contraddittoria che si scontra con il nostro abituale modo di vedere le cose.
[3] Il secondo volume dell'opera di Frege uscì pochi mesi più tardi, nel 1903, e il suo autore potè solo aggiungere un'appendice in cui rendeva pubblica l'antinomia e confessava il suo sconforto: «*qui non è in causa il mio metodo di fondazione in particolare, ma la possibilità di una fondazione logica dell'aritmetica in generale*».

quest'ultimo fosse stato di un tipo più "generale": gli insiemi vennero distinti in diversi livelli, tali per cui al livello 0 ci fossero gli elementi, al livello 1 gli insiemi di elementi, al livello 2 gli insiemi di insiemi di elementi e così via. Russell, infatti, individuava come causa essenziale della contraddizione il fatto che un linguaggio o una teoria potessero fare affermazioni su loro stessi, vale a dire l'autoreferenzialità[4].

Ma anche tale tentativo non risulterà del tutto convincente. Infatti, la ricostruzione della matematica nel sistema di Russell e Whitehead comporta l'introduzione di alcuni princìpi, come l'assioma dell'infinito, la cui natura logica è difficilmente sostenibile, incrinando il programma logicista di fondazione della matematica.

5. Il formalismo


9. David Hilbert

Accanto alla corrente logicista, nel corso del Novecento, si sviluppa una seconda concezione della matematica, propria della cosiddetta corrente "formalista", il cui massimo esponente è **David Hilbert** (1862 – 1943). Secondo Hilbert, i concetti e i princìpi della matematica per risultare "fondati" non necessitano di un'interpretazione in termini logici. Inoltre, il matematico tedesco abbandona anche il tradizionale criterio dell'evidenza intuitiva come garanzia di validità per gli enunciati fondamentali delle teorie matematiche. Secondo il formalismo la matematica è un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo regole formali concordate in partenza. Essa è quindi un'attività autonoma del pensiero[5]. Hilbert giunge a questa conclusione riflettendo sulla scoperta delle **geometrie non euclidee**: le nuove geometrie, pur partendo da postulati controintuitivi, si sono rivelate perfettamente coerenti. Perché una teoria risulti valida, non è dunque necessario che si fondi su postulati intuitivi. L'unica condizione di validità è l'assenza di contraddizioni[6].

Per dimostrare la non contraddittorietà delle teorie matematiche, secondo Hilbert, occorre innanzitutto rendere espliciti gli assunti della matematica, i suoi concetti primitivi e le regole di inferenza di cui essa si serve, traducendo tutte le proposizioni in un linguaggio simbolico ben definito. Trasformata la matematica in un mero calcolo, bisogna dimostrare che dalla teoria così formulata (detta "**sistema formale**") non è possibile ricavare alcuna contraddizione, cioè nessun teorema della forma "*A e non A*". Per il formalismo hilbertiano, la matematica è **un insieme di simboli privi di contenuto**; è, cioè, una disciplina che non rimanda ad alcun oggetto specifico e non scopre alcuna verità esterna, ma costituisce solo un'intelaiatura vuota di concetti il cui requisito fondamentale è la **coerenza**.

A questo punto, bisogna però stabilire con quali strumenti dimostrativi si debba provare la non contraddittorietà della matematica così formalizzata. Secondo Hilbert, tali strumenti dimostrativi devono essere assolutamente "sicuri", cioè devono essere, a loro volta, esenti da contraddizioni. In caso contrario, la prova in questione non avrebbe alcun valore. A tale scopo Hilbert progetta di

[4] Per approfondire vedi i paradossi del bibliotecario e del barbiere.
[5] Cfr: Hermann Hesse - Il gioco delle perle di vetro
[6] Il testo *Grundlagen der Geometrie* (*Fondamenti della Geometria*), pubblicato da Hilbert nel 1899, sostituisce agli assiomi di Euclide un insieme formale, composto di 21 assiomi, che evita le contraddizioni derivanti da quello di Euclide. Hilbert utilizza concetti indefiniti e specifica le loro proprietà esclusivamente tramite gli assiomi; non è necessario assegnare alcun significato esplicito ai concetti indefiniti. Questi elementi, punto, retta, piano e altri, potrebbero essere sostituiti, come dice Hilbert, da tavoli, sedie, boccali da birra e altri oggetti. Naturalmente, se la geometria tratta di "cose", gli assiomi non sono certo verità evidenti in sé, ma devono essere considerati arbitrari. Hilbert dapprima enumera i concetti indefiniti; essi sono: punto, retta, piano, giacere su (una relazione fra punto e piano), stare fra, congruenza di coppie di punti, e congruenza di angoli. Il sistema di assiomi riunisce in un solo insieme la geometria euclidea piana e solida.

provare la **coerenza** del sistema formale dell'aritmetica (che rappresenta la teoria matematica di base) utilizzando gli strumenti dimostrativi di un frammento dell'aritmetica stessa, e cioè le regole dell'**aritmetica finitista**[7], ovvero di quella sezione della matematica che si occupa di operazioni elementari, quali somme e prodotti. I metodi dell'aritmetica finitista permettono di raggiungere lo scopo che si vuole ottenere con un numero finito di passaggi, e quindi non nascondono paradossi o contraddizioni, perché risultano facilmente controllabili tramite semplici manipolazioni. Dunque, con tali metodi, intuitivamente validi, il grande matematico tedesco si prefigge il compito di dimostrare la non contraddittorietà dell'intera aritmetica (compresa l'aritmetica infinitaria, che fa riferimento all'infinità dei numeri) e di fornire così una **prova interna di coerenza**, dal momento che gli strumenti usati per la dimostrazione sono quelli impiegati in una parte sicura della teoria stessa.

Il programma formalista di Hilbert, attraverso il quale il grande matematico mirava alla completa assiomatizzazione della matematica, vide la sua espressione più significativa nella conferenza dal titolo "*I Problemi della Matematica*" presentata nel corso del Secondo Congresso Internazionale di Matematica tenutosi a Parigi nell'agosto del 1900. Hilbert colse l'occasione per effettuare una rassegna dei problemi della matematica ancora irrisolti sulla quale innestare un programma di attività e di ricerca: si trattava dei famosi 23 problemi[8] risolti i quali il suo progetto sarebbe potuto essere considerato pienamente e definitivamente realizzato: «*Signori vi annuncio la fine della matematica. La nostra disciplina ha conseguito tali e tanti successi nel corso dell'Ottocento che il nostro lavoro è pressochè finito. Ho qui un elenco di 23 problemi da risolvere per dare piena autoconsistenza e solide fondamenta alla matematica, dopodichè non resteranno che i dettagli. Ho completa certezza che nel breve volgere di qualche anno li avremo risolto tutti questi problemi, perché non esistono problemi insolubili in matematica. Tutti possono essere risolti con la forza del pensiero. La convinzione di poter risolvere ogni problema matematico è per noi un prezioso incoraggiamento*».


10. Kurt Godel

Nonostante l'impegno profuso da Hilbert[9] e dai numerosi valenti matematici che l'hanno affiancato nell'impresa, il suo tentativo di assiomatizzazione della matematica era destinato a fallire: infatti nel 1931 il logico austriaco **Kurt Gödel**[10] (1906-1978), in un articolo intitolato *Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei Principia Mathematica e dei sistemi affini*, dimostra i limiti invalicabili del programma hilbertiano. In questo scritto, Gödel prova che un **sistema** assiomatizzabile, non contraddittorio e "potente" come quello dell'**aritmetica** (cioè capace di esprimere e di dimostrare almeno quanto esprime e dimostra l'aritmetica), è **sintatticamente incompleto** ("*primo teorema di incompletezza di Gödel*"), perché al suo interno si può costruire una proposizione né dimostrabile né refutabile. Dal primo teorema, Gödel ricava il seguente corollario (detto "*secondo teorema di incompletezza di Gödel*"): **un sistema formale "potente" come quello dell'aritmetica richiede**

[7] Il primo lavoro di Hilbert sulle funzioni invarianti lo portò a dimostrare nel 1888 il suo famoso **teorema di finitezza**. Si trattava di un metodo per dimostrare che esiste un insieme di generatori finito per un numero di variabili qualsiasi, ma in forma totalmente astratta: pur dimostrandone l'esistenza, non si fornisce nessun procedimento che permetta di costruirlo.

[8] Alcuni di questi, anche alcuni reputati molto difficili, vennero risolti di lì a breve, altri sono stati ampiamente dibattuti durante l'intero XX secolo, alcuni infine continuano ad essere una sfida per i matematici.

[9] Sulla sua lapide, a Göttingen, si può leggere il seguente epitaffio: «*Wir müssen wissen, wir werden wissen - Dobbiamo sapere, sapremo*». Per ironia della sorte, il giorno prima che Hilbert pronunciasse questa frase, Kurt Gödel aveva presentato la sua tesi, contenente il suo famoso teorema di incompletezza: ossia ci sono cose che potrebbero essere vere, ma che non possiamo dimostrare.

[10] Kurt Gödel nasce il 28 aprile 1906, nella città di Brno nell'attuale Repubblica Ceca, e mostra fin da bambino le sue eccezionali doti intellettive, tanto da meritarsi il soprannome familiare di «Herr Warum» «(signor perché») per la spiccata propensione a porre domande su domande.

mezzi più "potenti" del sistema stesso per la prova della propria non contraddittorietà[11]. Per accertare la coerenza di un sistema, bisogna ricorrere a strumenti dimostrativi che superano il grado di complessità di quel sistema. In sostanza, **le teorie matematiche non sono in grado di autogiustificarsi**.

Questo risultato attesta che nelle scienze esatte è impossibile individuare un fondamento indiscutibile, e conferma i limiti delle nostre possibilità di conoscenza già emersi, nel Novecento, nell'ambito delle scienze empiriche. Anche in matematica fallisce il progetto di rendere certo e incrollabile il nostro sapere. **Le pretese giustificazioniste definitive non sono razionali**.

Con questo, la fede nella certezza della conoscenza è venuta meno. Prendiamo come esempio il famoso paradosso di Epimenide che, essendo Cretese egli stesso, affermò: "Tutti i Cretesi sono bugiardi". È un enunciato autoreferenziale: se Epimenide dice il vero contraddice l'affermazione che "tutti i Cretesi sono mentitori", se dice il falso allora "non tutti i Cretesi sono bugiardi". Come possono logicamente stare in piedi frasi simili? Il teorema di Gödel vuol semplicemente dire che per quanto si affinino gli strumenti della matematica rimarrà sempre una proposizione indecidibile nella realtà. Non tutto può essere descritto e analizzato dalla scienza[12].

11. **Jan Luitzen E. Brouwer**

6. L'intuizionismo

Su posizioni diverse, sia rispetto al formalismo sia al logicismo, si pone la dottrina dell'**intuizionismo[13]**, che fa capo agli olandesi **Jan Luitzen E. Brouwer** (1881-1966) e **Arend Heyting** (1898-1980). Come Hilbert, anche Brouwer pensa che la matematica non si fondi sulla logica. Secondo Brouwer essa ha un carattere primitivo e rappresenta essenzialmente il risultato di **costruzioni** dell'intelletto umano[14]. La serie dei numeri naturali, per esempio,

[11] Detto in altri termini: Ogni sistema assiomatico (un insieme di proposizioni o principi che vengono assunti come veri perché ritenuti evidenti) che sia in grado di descrivere l'aritmetica dei numeri interi ammette proposizioni logiche sugli interi che non possono essere dimostrate né confutate a partire dagli assiomi.
Questo teorema riveste fondamentale importanza nella scienza logica e matematica e ha dato origine a un grande sconvolgimento tra i matematici del tempo. La sua dimostrazione consiste nell'evidenziare che in ogni sistema formale coerente e assiomatizzabile si danno proposizioni indecidibili, cioè tali che né esse né le loro negazioni sono dimostrabili all'interno del teorema stesso.
Gödel inoltre, riuscì a provare l'impossibilità che un sistema formale con queste caratteristiche dimostri di essere non contraddittorio. La formula che dimostra infatti la non contraddittorietà è tra quelle indecidibili.

[12] Molti non compresero appieno il senso delle affermazioni di Gödel, ritenendo che il suo teorema avesse definitivamente distrutto la possibilità di accedere a verità matematiche di cui avere assoluta certezza. Gödel invece era convinto di non avere affatto dissolto la consistenza dei sistemi logici, da lui sempre considerati come funzioni reali dotati di pieno valore ontologico, e che anzi il suo stesso teorema di incompletezza aveva una valenza di oggettività e rigore logico. Alla base del pensare gödeliano c'è la convinzione che il mondo sia profondamente razionale e non ci sia spazio per la casualità. Oltretutto, egli spiegava, la presenza di un enunciato che affermi di essere indimostrabile all'interno di un sistema formale, significa appunto che esso è vero, dato che non può essere effettivamente dimostrato. E proseguiva dicendo: «Nonostante le apparenze, non vi è nulla di circolare in un tale enunciato, dal momento che esso all'inizio asserisce l'indimostrabilità di una formula ben determinata, e solo in seguito, quasi per caso, risulta che questa formula è proprio quella che esprime questo stesso enunciato». (Kurt Gödel, nota 15)

[13] L'intuizionismo, al di fuori della matematica, è un orientamento filosofico dove la priorità è data all'intuito e alle impressioni spontanee e agli aspetti impliciti del ragionamento rispetto al ragionamento esplicito e alle argomentazioni. Fra i principali filosofi intuizionisti ricordiamo Rousseau e Bergson.

[14] Secondo la concezione dell'intuizionismo, la matematica è un insieme di costruzioni mentali e le leggi logiche non hanno validità universale. Per l'intuizionismo la validità della matematica, in quanto scienza costruttiva, è indipendente dalla logica, proprio perché quest'ultima si riferisce a espressioni linguistiche, cioè a un momento che è successivo a quello del concepimento delle costruzioni mentali, quello della loro estrinsecazione verbale. Non è quindi possibile fondare la matematica sulla logica. Inoltre, proprio per il carattere costruttivo della matematica intuizionista, non sono necessariamente valide per essa le leggi logiche.

è costruita dalla nostra mente grazie all'intuizione che noi abbiamo della successione degli istanti nel tempo, che ci consente di formare nuove unità a partire da quelle precedentemente date, attraverso l'operazione di "passaggio al successore"[15]. La posizione di Brouwer è dunque vicina a quella di **Kant**, che considerava l'aritmetica fondata sul carattere sintetico a priori del tempo.

Da questo specifico punto di vista, per giustificare il corpo delle teorie matematiche, non basta più dimostrarne la coerenza, come volevano Hilbert e la scuola formalista. Secondo gli intuizionisti, l'**esistenza** di un ente matematico non può significare la sua eventuale "possibilità" (o non contradditorietà), ma soltanto la sua **avvenuta costruzione**. Per poter affermare che un numero di una determinata specie esiste, occorre sapere come costruirlo, o come poterlo contare in un numero finito di passaggi.

Partendo dalla sua posizione costruttivista, Brouwer respinge il concetto cantoriano di **infinito attuale**, cioè l'esistenza di insiemi infiniti presi nella loro totalità. Tale idea è intuizionisticamente inaccettabile, proprio perché l'infinito attuale è considerato qualcosa di compiuto, e di indipendente da ogni attività umana di generazione o costruzione. Gli intuizionisti, seguendo le tesi di **Aristotele**, accettano solo l'**infinito potenziale**; pensano, cioè che l'infinito possa presentarsi esclusivamente come un processo in fieri, mai come un risultato. Ad esempio, quando si dice che i numeri naturali sono infiniti, intuizionisticamente parlando ciò significa che, dato un certo insieme finito di numeri, esiste sempre la possibilità di costruirne un altro che contiene un numero in più, ma **non esiste un insieme di numeri che sia attualmente infinito**.

Un'altra conseguenza della prospettiva di Brouwer è il **rifiuto del principio logico del terzo escluso**: A o non A. Accettare questo principio significherebbe ammettere che, per ogni proposizione A, si sia in grado di costruire la dimostrazione di A, o quella di non A. Ma ciò equivarrebbe a un'assurda ipotesi di onniscienza, palesemente esclusa dal gran numero di problemi di cui ignoriamo attualmente la situazione. Il principio del terzo escluso non può considerarsi un assioma logico intuizionista. Di conseguenza, l'ambito della logica classica risulta ampiamente ridimensionato.

12. Arend Heyting

Brouwer ha indubbiamente il merito di aver scoperto un terreno in cui l'impostazione logica tradizionale risulta inadeguata: **l'ambito della coscienza e degli atti mentali**. Non a caso, Heyting caratterizza la logica intuizionista come la **logica del conoscere**, a differenza di quella classica, che è una **logica dell'essere**. D'altro canto, gli intuizionisti sono costretti dalla loro concezione filosofica a **respingere parti considerevoli della matematica**: in particolare, Brouwer rifiuta quei settori che sono basati sul concetto di infinito attuale, accettabili invece, in un'ottica di tipo logicista o platonica. **L'assunzione di una certa ipotesi filosofica sembra determinante per il tipo di matematica che si produce.**

Di fronte ai limiti emersi nei vari indirizzi della filosofia della matematica nella prima metà del Novecento (logicista, formalista e intuizionista) è venuta meno la fiducia in una fondazione **unitaria** della matematica. Tuttavia, la ricerca sui fondamenti non è stata infruttuosa. Grazie ad essa ed ai metodi introdotti per affrontare l'indagine, si è sviluppata una nuova forma di logica: la **logica matematica**, che fa largo uso del simbolismo e dei concetti delle teorie matematiche, chiamata anche "**logica simbolica**" per la sua tendenza a trascrivere in simboli artificiali l'intero procedimento deduttivo.

---

[15] Secondo Brouwer, l'intuizionismo si basa su due atti fondamentali, entrambi alinguistici ed in diretto riferimento all'intuizione temporale. Il primo atto riconosce che l'origine dell'attività matematica deriva dalla percezione di un passaggio di tempo, cioè della scissione dell'unità immediata in due distinte unità «una delle quali cede il posto all'altra ma è conservata dalla memoria»; la «biunità» ottenuta, considerata astraendo da ogni considerazione qualitativa, costituisce la pura e vuota forma quantitativa dell'entità di numero. Il secondo atto riconosce la possibilità di generare successioni di scelte libere procedenti all'infinito, scegliendo i termini tra le entità matematiche già costruite.